第十讲

极点配置、镇定、无静差跟踪控制

例题 1 系统方程为

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u \qquad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

试构造K_1，使$(A+BK_1, b=BL)$可控。

解（试凑法） 取

$$x_1 = \mathrm{BL} = \mathrm{b} = [0 \ \ 1 \ \ 1]^{\mathrm{T}} \neq 0,\ \ \mathrm{L} = [1 \ \ 1]^T。$$

考虑

$$x_1 = \mathrm{b}, \qquad x_{k+1} = \mathrm{A}\ x_k + \mathrm{B}\ u_k \ (k=1, 2, \ldots, n-1),$$

因为

$$Ax_1=[1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$$

与x_1线性无关，故取

$$x_2= Ax_1,$$

也就是可令

$$u_1=[0\quad 0]^{\mathrm{T}}$$

又因为Ax_2与x_1, x_2 构成线性相关组，u_2不能取 $[0\quad 0]^{\mathrm{T}}$,可取

$$u_2=[-1\quad 1]^{\mathrm{T}},$$

这样可得 $x_3= Ax_2+Bu_2= [2\quad 0\quad 2]^{\mathrm{T}}$。

因此，由$K_1=[u_1\quad u_2\quad 0][x_1\quad x_2\quad x_3]^{-1}$，可得

$$\mathbf{K}_1=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}}_{[u_1\quad u_2\quad 0]}\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}^{-1}}_{[x_1\quad x_2\quad x_3]}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{b} & (\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1)\mathbf{b} & (\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1)^2\mathbf{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

不难验证$(A+BK_1\ b)$可控。

例题2 系统方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}u$$

欲使闭环系统(A+BK)具有特征值–2, –2, – 1±j, 试确定状态反馈增益阵K。

解 先用试凑法求x_i 和 u_i **：**

取L $=[1\ \ 0]^T$, $x_1=b_1=[0\ 0\ 1\ 0]^T$;

取 $u_1=[-1\ \ 0]^T$, 可得 $x_2=[0\ 1\ 0\ 0]^T$;

取 $u_2=[0\ \ 0]^T$, 可得 $x_3=[1\ 0\ 0\ 0]^T$;

取 $u_3=[0\ \ 1]^T$, 可得 $x_4=[0\ 0\ 0\ 1]^T$;

于是由 $\mathbf{K}_1$ 的计算式可得

$$\mathbf{K}_1=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

显然，$(\mathrm{A}+\mathrm{BK}_1,\ \mathrm{b}_1)$可控。令$\mathrm{k}=[k_1\ \ k_2\ \ k_3\ \ k_4]$, 直接计算

$$\mathbf{A}+\mathbf{BK}_1+\mathbf{b}_1\mathbf{k}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ k_1 & k_2 & k_3 & k_4\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

它的特征式为

$$s^4-(1+k_3)s^3+(k_3-k_2)s^2+(k_2-k_1)s+k_1-k_4,$$

期望特征式为

$$s^4+6s^3+14\mathrm{s}^2+16s+8,$$

比较上述两多项式的系数，可得

$$k_1=-37,\quad k_2=-21,\quad k_3=-7,\quad k_4=-45$$

状态反馈阵可取为

$$\mathbf{K}=\mathbf{K}_1+\mathrm{Lk}=\begin{bmatrix} -37 & -21 & -8 & -45 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

在上面的做法中，在L和 u_i 取定后，k 就唯一的确定了。但 L 和 u_i 是非唯一的，这一事实说明达到同样极点配置的K值有许多。K的这种不唯一性是多输入系统与单输入系统极点配置问题主要区别之一。如何充分利用K的自由参数,以满足系统其它性能的要求,是多输入系统状态反馈设计的一个研究领域。

多输入系统状态反馈配置极点问题的另一特点是“非线性方程”。说明如下：如将K阵的元素用待定系数k_{ij}表示，闭环的多项式可以写为

$$\det[s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})]$$

$$=s^n+f_1(\mathbf{K})s^{n-1}+f_2(\mathbf{K})s^{n-2}+\cdots+f_{n-1}(\mathbf{K})s+f_n(\mathbf{K})$$

式中f_i (K)表示某一个以K的元素k_{ij}为变量的**非线性函数**。如果将期望多项式表成

$$s^n+\alpha_1 s^{n-1}+\alpha_2 s^{n-2}+\cdots+\alpha_{n-1}s+\alpha_n$$

比较两式的系数，可知应有

$$f_i(\mathbf{K}) = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad \text{(S—3)}$$

例： 对多变量系统，

$$\mathbf{A} + \mathbf{BK} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12}+1 & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23}+1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

显然，$\det(sI - A - BK)$的系数是非线性的。

det(sI−A−BK)在单输入情况始终是线性方程组，在多输入时，一般是非线性方程。极点配置定理表明：当系统可控时，可以通过牺牲K的自由参数，使 $\det(sI-A-BK)$ 简化为一组能解出的线性方程组。

对例题2，也可以用求解上述方程来做，通过 K 中自由参数的适当选取，往往可以方便地求出需要的K阵。

例题3 对例题2中的系统，用直接求解$f_i(\mathrm{K})=\alpha_i$的方法，计算达到极点配置的K阵，这里，欲使配置的闭环系统(A+BK)具有特征值–2, –2, –1±j。

解 因为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}u$$

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix}k_1&k_2&k_3&k_4\\k_5&k_6&k_7&k_8\end{bmatrix}$$

则 $$\mathbf{A}+\mathbf{BK}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\k_1&k_2&1+k_3&k_4\\k_5&k_6&k_7&1+k_8\end{bmatrix}$$

方案 1： 取

$$k_4=k_5=k_6=k_7=0,\quad 1+k_8=-2,\quad \text{由}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{BK}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_1 & k_2 & 1+k_3 & k_4 \\ k_5 & k_6 & k_7 & 1+k_8 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}+\mathbf{BK}=\left[\begin{array}{ccc:c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_1 & k_2 & 1+k_3 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1+k_8 \end{array}\right]$$

$$(s+2)[(s+1)^2+1]=s^3+4s^2+6s+4$$

易得

$$k_1=-4,\quad k_2=-6\quad 1+k_3=-4$$

即有

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} -4 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

方案2： 取

$$k_1=k_2=0,\ k_3=-1\ ,\ \ k_4=1$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{BK}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ k_1 & k_2 & 1+k_3 & k_4 \\ k_5 & k_6 & k_7 & 1+k_8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{BK}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1+(-1) & 1 \\ k_5 & k_6 & k_7 & 1+k_8 \end{bmatrix}$$

由

$$(s+2)^2[(s+1)^2+1]=s^4+6s^3+14s^2+16s+8$$

可得

$$k_5=-8,\ k_6=-16\ ,\ k_7=-14,\ k_8=-7,$$ 即有

$$\mathbf{K}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ -8 & -16 & -14 & -7 \end{bmatrix}$$

多输入系统极点配置中反馈增益阵是不唯一，因而由此生成的闭环传递函数阵一般是不同的，从而也将具有不同的响应特性。

如同单输入系统一样, 对于某一组指定的特征值进行配置时，系统可控只是充分条件，而不是必要条件。

给定极点组可用状态反馈达到配置的充分必要条件是给定极点组需包含系统的全部不可控模态。因此判别原来系统的模态可控性就成了关键。

五、状态反馈对多输入多输出系统零点的影响

对一个多变量系统的传递矩阵：$\mathbf{G}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$，利用频率域方法可以证明，状态反馈一般也不影响$\mathbf{G}(s)$的零点。

六、镇定问题

1. 状 态 反 馈 的 镇 定 问 题： 对 于 定 常 系 统

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

若能够找到状态反馈

$$u = v + \mathbf{K}x$$

使得经反馈后的闭环系统

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})x + \mathbf{B}v$$

的所有特征值均具有负实部（渐近稳定），就称系统是可反馈镇定的。

定理4－6： 系统$(\mathbf{A},\mathbf{B})$可用状态反馈镇定的充分必要条件是其所有的不可控模态均具负实部。

事实上，因为状态反馈不改变不可控的模态：

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2\\ 0 & \mathbf{A}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1+\mathbf{B}_1\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_2+\mathbf{B}_1\mathbf{K}_2\\ 0 & \mathbf{A}_4\end{bmatrix}$$

则系统可镇定 $\Leftrightarrow \operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A}_4)<0$。

算法：

1. 判断系统的可镇定性，若否，结束；若是

2. 对系统进行可控性分解，即找到变化矩阵P；满足 $\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{PAP}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2\\ 0 & \mathbf{A}_4\end{bmatrix},\bar{\mathbf{B}}=\mathbf{PB}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ 0\end{bmatrix}$

3. 对变换后系统找到反馈增益矩阵 $\bar{\mathbf{K}}$ 使系统稳定

$$\bar{\mathbf{A}}+\bar{\mathbf{B}}\mathbf{K}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2\\ 0 & \mathbf{A}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ 0\end{bmatrix}[\mathbf{K}_1 \quad \mathbf{K}_2]=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1+\mathbf{B}_1\mathbf{K}_1 & \mathbf{A}_2+\mathbf{B}_1\mathbf{K}_2\\ 0 & \mathbf{A}_4\end{bmatrix}$$

找到矩阵 $\bar{\mathbf{K}}=[\bar{\mathbf{K}}_1 \quad \mathbf{0}]$ 使系统稳定即可。

4. 根据 $\bar{\mathbf{A}}+\bar{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{K}}=\mathbf{PAP}^{-1}+\mathbf{PB}\bar{\mathbf{K}}=\mathbf{P}(\mathbf{A}+\mathbf{BK})\mathbf{P}^{-1},\mathbf{K}=:\bar{\mathbf{K}}\mathbf{P}$

5. 计算 $\mathbf{K}=\bar{\mathbf{K}}\mathbf{P}$ 即为原系统镇定反馈增益矩阵。

2. 系统按镇定分类

可将系统分类成：

系统

- **可控系统** $\Leftrightarrow$ 可任意配置极点 $\Rightarrow$ 可镇定
- **不可控系统**
  - 可镇定：　若其不可控的模态均具负实部
  - 不可镇定：若至少有一个不可控的模态不具负实部

跟踪问题及其稳态特性

跟踪问题的稳态特性

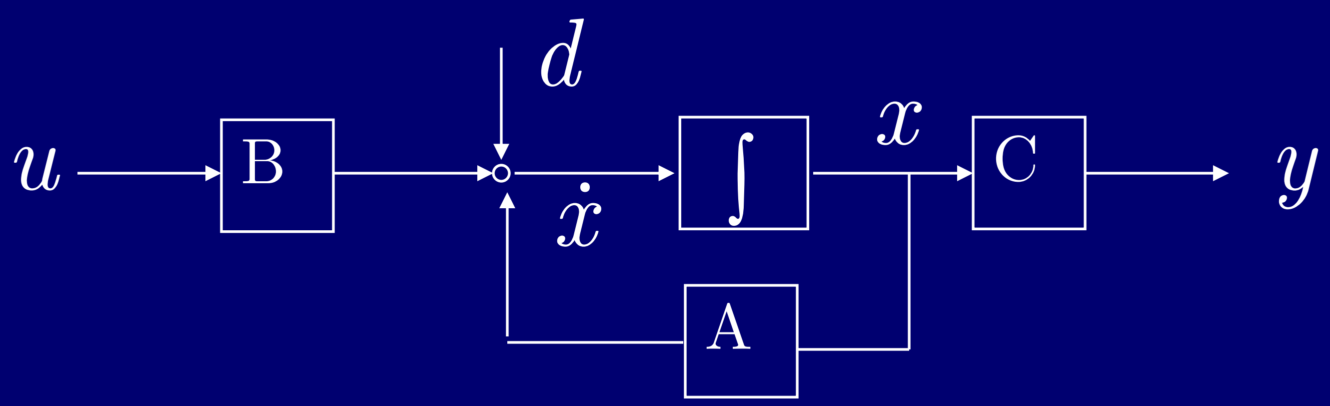
一、跟踪问题

1. 受控对象

设系统方程为

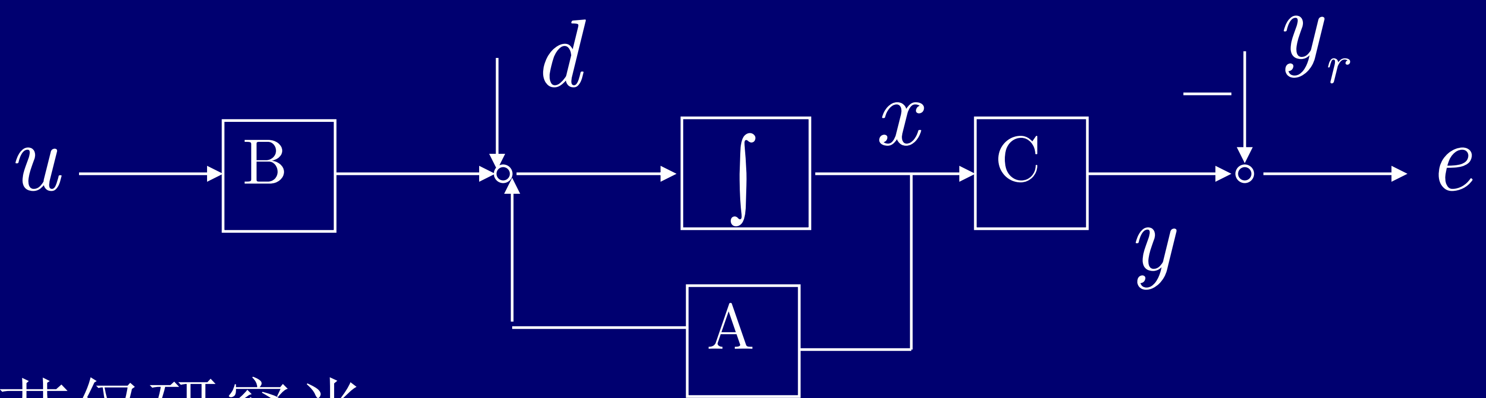
$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u + d, \quad y = \mathbf{C}x \qquad (4-18)$$

其中A、B和C定义同前，d 是n维的干扰向量。



问题提法：设计控制律 u ，使系统输出 y 跟踪给定的参考输入信号 y_r，即

$$\lim_{t\to\infty} e(t)=y(t)-y_r(t)=0$$



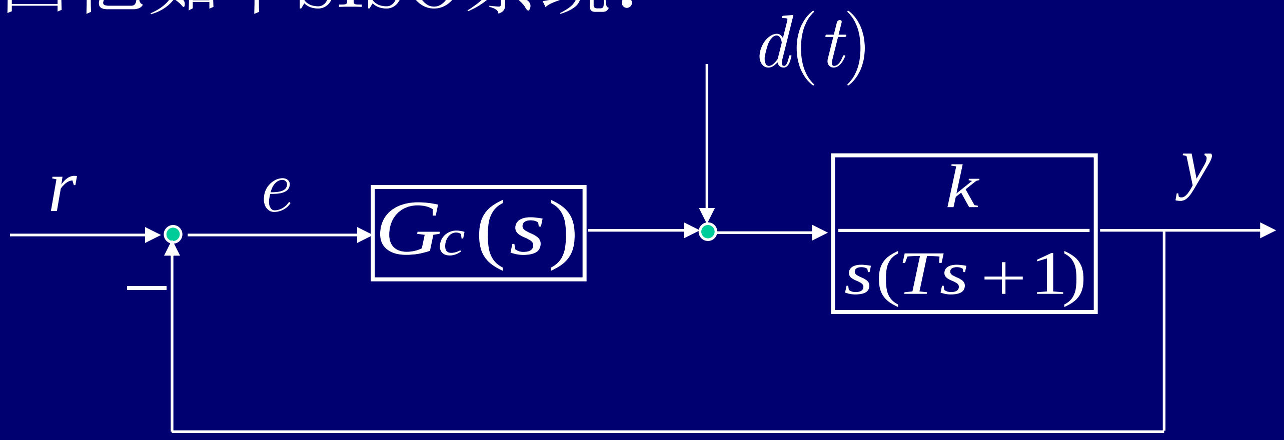
本节仅研究当

$$y_r(t)=y_0 1(t),\ y_0\in \mathrm{R}^q$$
$$d(t)=d_0 1(t),\ d_0\in \mathrm{R}^n$$

时的跟踪问题，这里，y_0 和 d_0 分别为q 维和 n 维常相量。

2. 经典控制论处理SISO系统的启发

回忆如下SISO系统：



问题：要求设计控制器，使得系统在参考输入

$$r(t)=t$$

及干扰 $d(t)=1(t)$

作用下无稳态误差，即 $e \to 0$ ，如何设计$G_c(s)$?

根据经典控制论的知识：

- $G_c(s)$应包含一个积分环节；
- $G_c(s)$应使闭环系统稳定。

$G_c(s)$可取比例积分：

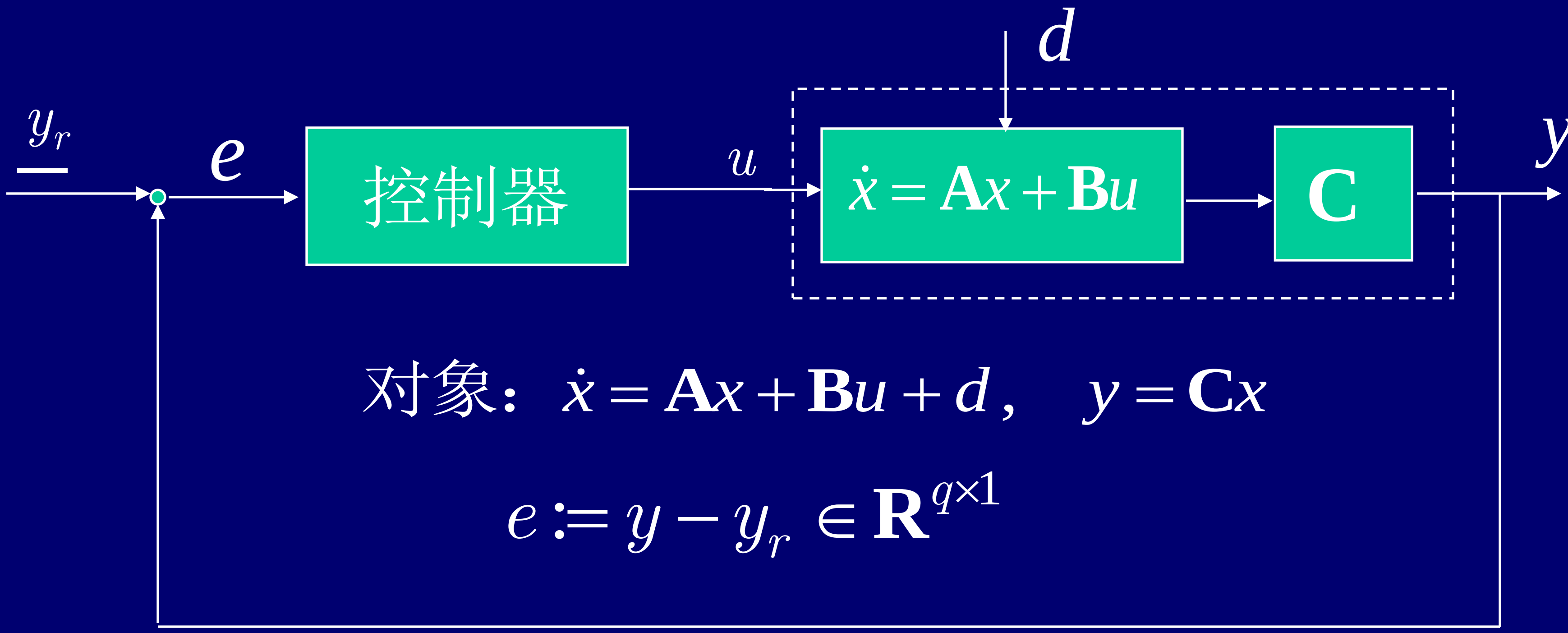
$$\frac{k_c(\tau s+1)}{s}=k_c\tau+\frac{k_c}{s}$$

式中k_c、τ要选得满足闭环稳定的条件。

3. 解决问题的方法：采用反馈控制，同时，为了实现无稳态误差：

$$\lim_{t\to\infty} e(t)=y(t)-y_r(t)=0$$

控制中应增加偏差的积分项。



对象：$\dot{x}=\mathbf{A}x+\mathbf{B}u+d,\quad y=\mathbf{C}x$

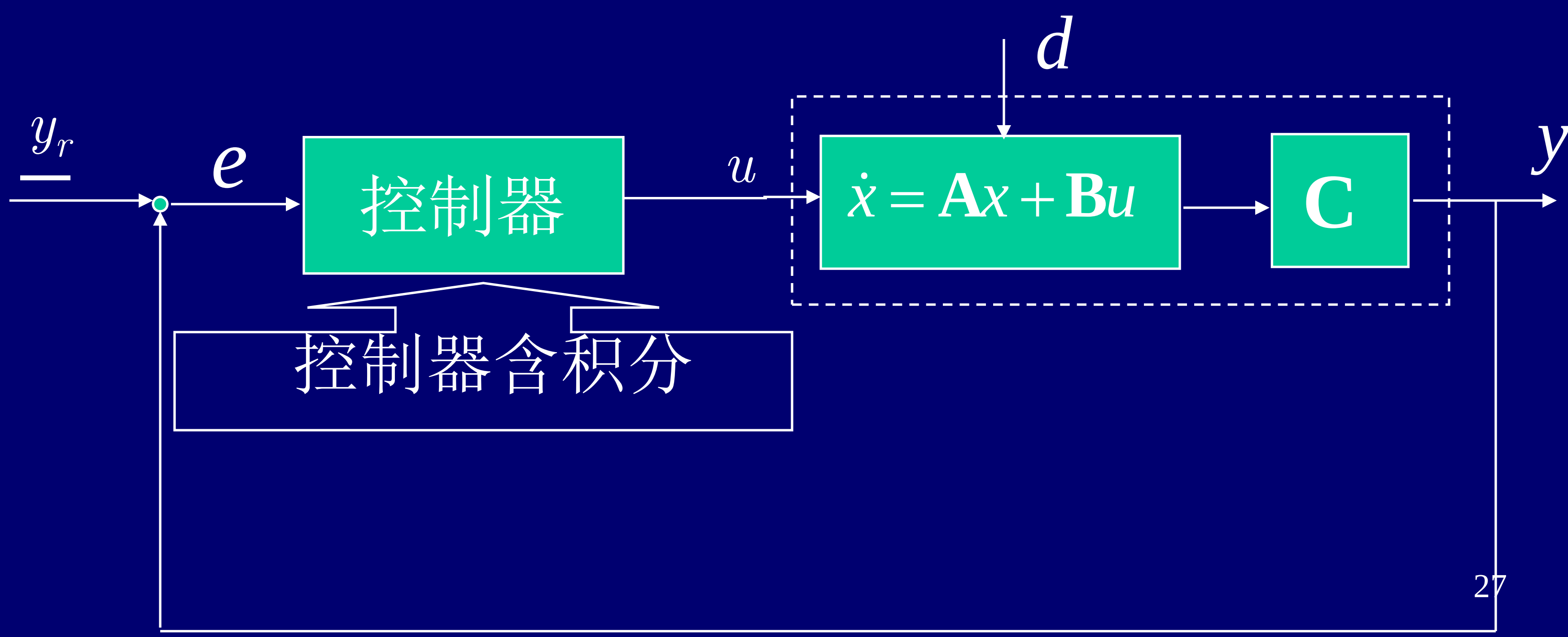
$$e:=y-y_r\in\mathbf{R}^{q\times 1}$$

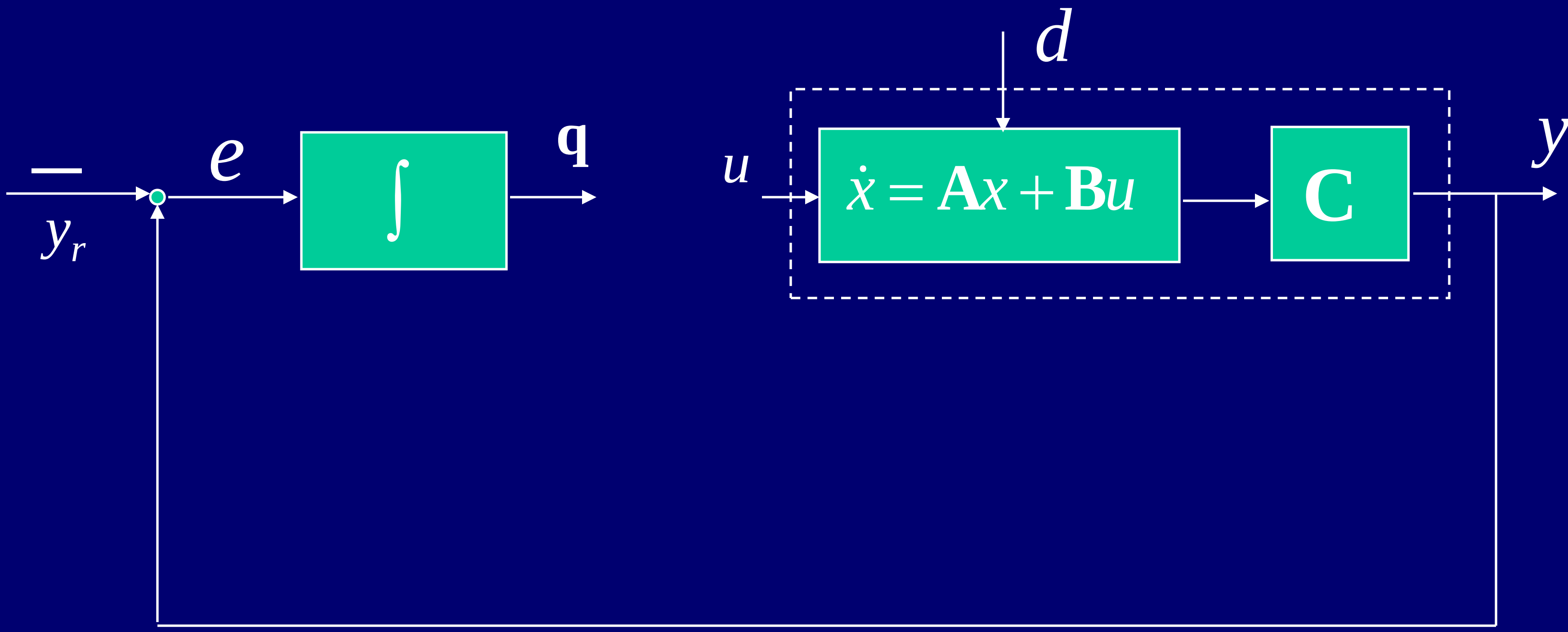
跟踪问题的控制系统结构图

二、增加积分器后开环系统的结构

由经典控制理论可知，为了消去阶跃输入时的稳态误差，需要：

- 在系统中引入积分环节
- 此外，还要考虑系统稳定性问题。





开环系统:

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u + d, \quad y = \mathbf{C}x$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = e(t) = \mathbf{C}x - y_r(t) \qquad (4-20)$$

$$\Rightarrow \mathbf{q}(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau = \int_0^t [y(\tau) - y_r(\tau)]d\tau$$

这样就把系统增广为如下组合系统：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} d \\ -y_r \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \qquad (4-21)$$

这里，新的状态向量的维数为$n+q$，等于原系统状态维数与积分器个数之和。

为了保证系统的稳定性，要引入状态反馈，故首先要研究开环系统的可控性等问题。

定理4-7 系统(4-21)

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} d \\ -y_r \end{bmatrix}, \quad y = [\mathbf{C} \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (4-21)$$

可控的充分必要条件为系统（A, B)可控，且

$$\mathrm{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = n + q \qquad (4\text{-}22)$$

注意：条件(4-22)式只有当输入数大于等于输出数($p \geqslant q$)且rank$\mathbf{C}=q$时才有可能成立。

证明：根据PBH检验法，系统可控，当且仅当

$$\operatorname{rank}\left[\begin{array}{cc:c} \mathbf{A}-s\mathbf{I} & 0 & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & -s\mathbf{I} & 0 \end{array}\right]=n+q,\ \forall s\in\mathbf{C} \quad （4-23）$$

但$(\mathbf{A},\mathbf{B})$可控$\Rightarrow$上述矩阵前n行线性无关。

若$s\neq 0\Rightarrow$下面的q行也线性无关，此时$(4-22)$式自然成立；

若s=0, 条件（4－22）保证了此时(4－23)式仍然成立。

证**完**。

三、引入状态反馈形成闭环系统

在定理4-7的条件下，(4-21)式的系统是可控的。因此可以利用状态反馈配置闭环系统的特征值的方法来改善系统的**动态性能和稳态性能**。对开环系统：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} d \\ -y_r \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \qquad (4-21)$$

引入状态反馈

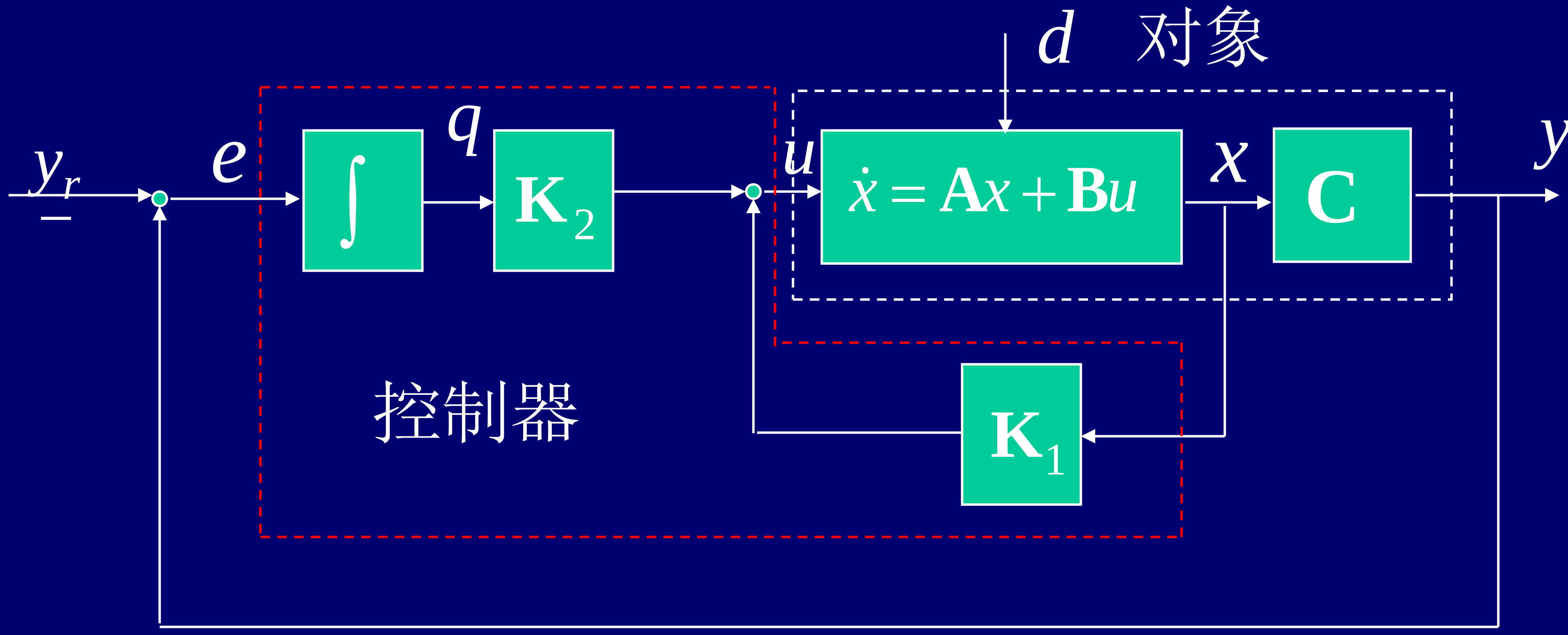
$$u = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_1 x + \mathbf{K}_2 \mathbf{q} \qquad (4-24)$$

由(4-21)式和(4-24)式组成的闭环系统的方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{BK}_1 & \mathbf{BK}_2 \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ -y_r \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \qquad (4-25)$$

(4-24) 式中第一项$K_1 x$是对象的一个普通的状态反馈，第二项$K_2 q$是为了改善稳态性能而引入的偏差的积分信号。

(4-25)式的系统表示在下面的图中。



$$e := y - y_r$$

$$\mathbf{q}(t) = \int_0^t e(\tau)d\tau = \int_0^t [y(\tau) - y_r(\tau)]d\tau$$

$$u = \mathbf{K}_1 x + \mathbf{K}_2 \mathbf{q}$$

定理4-8 设K_1和K_2选得使(4-25)的特征值均具有负实部，即

$$\mathrm{Re}\,\lambda\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1 & \mathbf{B}\mathbf{K}_2\\ \mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\right\}<0$$

且干扰和参考输入均为阶跃信号，即

$$d(t)=d_0 1(t),\qquad y_r=y_0 1(t)$$

其中d_0、y_0为 n 维和 q 维的常值向量。则$x(t)$及q(t)趋向于常值稳态值，而输出趋向于给定的参考值，即有

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=\lim_{t\to\infty}[y(t)-y_r(t)]=\lim_{t\to\infty}[y(t)-y_0 1(t)]=0 \quad (4\text{-}26)$$

证明　对(4-25) 式进行拉氏变换:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1 & \mathbf{B}\mathbf{K}_2 \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ -y_r \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} \qquad (4-25)$$

得到 $$\begin{bmatrix} x(s) \\ q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1) & -\mathbf{B}\mathbf{K}_2 \\ -\mathbf{C} & s\mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_0 \\ -y_0 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

因为(4-25)式中的系统是稳定的，应用拉氏变换的终值定理，可得

$$\lim_{t\to\infty} \begin{bmatrix} x(t) \\ q(t) \end{bmatrix} = \lim_{s\to 0} s \begin{bmatrix} x(s) \\ q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1) & -\mathbf{B}\mathbf{K}_2 \\ -\mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_0 \\ -y_0 \end{bmatrix}$$

即$x(t)$、$q(t)$趋向于常值向量，这意味着

$$\dot{x}(t)$$

$$\dot{q}(t)$$

都趋向于零。又因为

$$e = \dot{q}(t) = y(t) - y_r(t)$$

故有

$$\lim_{t\to\infty}[y(t) - y_0 1(t)] = 0$$

成立，即

$$\lim_{t\to\infty} e = \lim_{t\to\infty}(y(t) - y_r(t)) = 0$$

证完。

注1. 由于所有的特征值均稳定，上式中的逆矩阵存在。

注2. 在以上的分析中我们没有考虑初始条件。若考虑初始条件，有

$$\begin{bmatrix} x(s) \\ q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1) & -\mathbf{B}\mathbf{K}_2 \\ -\mathbf{C} & s\mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x(0) \\ q(0) \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1) & -\mathbf{B}\mathbf{K}_2 \\ -\mathbf{C} & s\mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_0 \\ -y_0 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1) & -\mathbf{B}\mathbf{K}_2 \\ -\mathbf{C} & s\mathbf{I} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x(0) \\ q(0) \end{bmatrix} \right) = e^{\tilde{\mathbf{A}}t} \begin{bmatrix} x(0) \\ q(0) \end{bmatrix} \to 0$$

即初始条件对系统稳态误差没有影响。

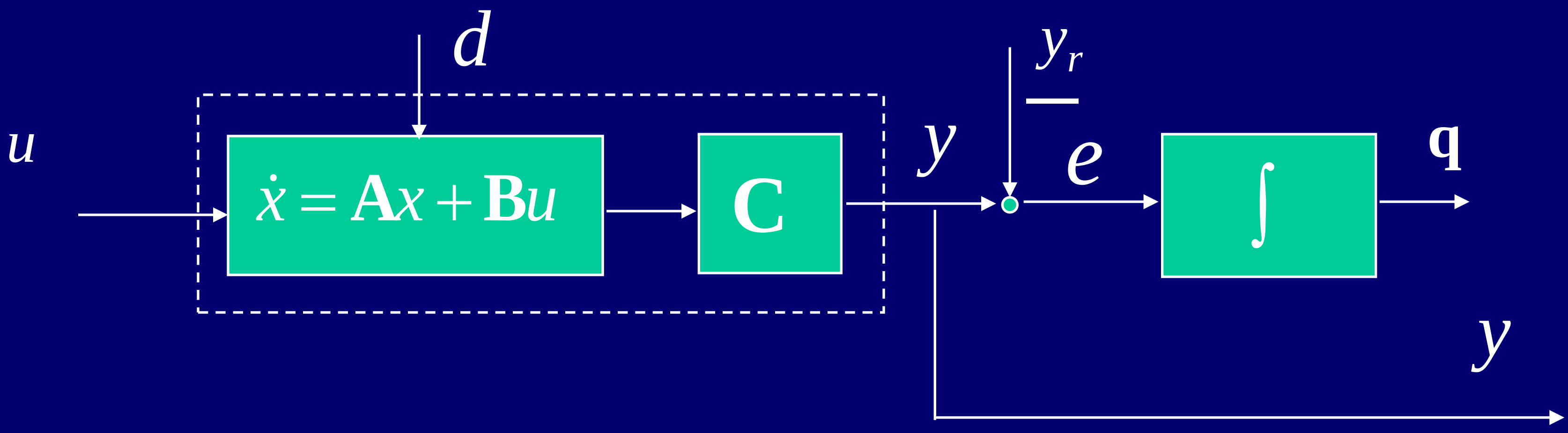
注3：条件(4-22) 式的说明：

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = n+q \qquad (4-22)$$

若 (4-22)式不满足，即有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \mathbf{A}-s\mathbf{I} & 0 & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & -s\mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}_{s=0} < n+q$$

这表明增广系统(4-21) 式有s=0这一特征值不可控，状态反馈(4-24)不能改变这个特征值，它在闭环动态方程中仍存在, 从而导致闭环系统不稳定。



这一零、极对消的原因是正向通道中引入了积分环节(参考本节插图)，也就是引入了一个s= 0 的极点，它一定是**与开环对象的零点发生了相消**。

因此(4-22)式不成立意味着对象有s=0的(传输)零点。在单变量的情况，就是对象传递函数的零点，但是在反馈回路系统中零极对消是不允许的。

例题 系统方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u+d,\quad y=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}x$$

试问是否可以用本节的方法设计控制器,使得在 $y_r(t)=d(t)=\mathbf{1}(t)$作用下无稳态误差。

解 验证(4-22)式

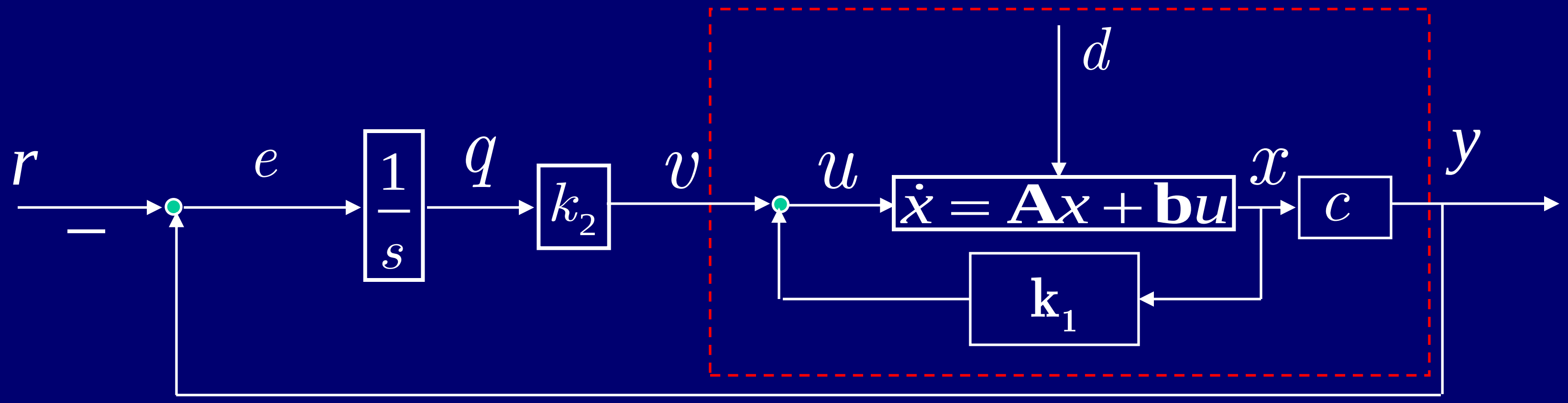
$$rank\begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\\ \mathbf{C} & 0\end{bmatrix}=rank\left[\begin{array}{cc:c}0 & 1 & 0\\ -2 & -3 & 1\\ \hdashline 0 & -1 & 0\end{array}\right]=2<n+q=3$$

计算对象部分的传递函数

$$\mathbf{G}(s)=\frac{s}{s^2+3s+2}$$

对这一系统无法用本节的方法进行控制器设计以消去稳态误差。事实上，因为是SISO系统，

$$u=\mathbf{k}_1x+k_2\mathbf{q}$$



方框内的系统传递函数描述为：

$$\mathbf{c}(s\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{b}\mathbf{k}_1)^{-1}\mathbf{b},$$

其中，

$$\mathbf{c}(s\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{b}\mathbf{k}_1)^{-1}\mathbf{b}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{b}\mathbf{k}_1)}\begin{bmatrix}1\\ s\end{bmatrix}$$

$$=\frac{s}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{b}\mathbf{k}_1)}$$

显然，有s=0的零、极点对消。

例题4-4 系统方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 11 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}u+\underbrace{\begin{bmatrix}0\\ 4w\\ 0\\ 6w\end{bmatrix}}_{d}$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

试设计状态反馈控制律，要求输出跟踪参考输入

$$y_r=y_0 1(t)\in \mathrm{R}^1,$$

y_0 为阶跃函数的幅值。

解 1）为了消去稳态误差，应引入积分器，得到增广系统方程如下

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ \hline 0 \end{array}\right] u + \left[\begin{array}{c} 0 \\ 4w \\ 0 \\ 6w \\ \hline -y_0 \end{array}\right]$$

$$y = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}$$

验证系统可控应满足的条件

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \det\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = 10$$

故增广系统可控。

2）用状态反馈可以任意配置特征值。令反馈增益阵为

$$u = [\mathbf{k}_1 \quad \mathbf{k}_2]\begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} \Rightarrow [k_1 \quad k_2 \quad k_3 \quad k_4 \mid k_5]$$

下面来选k_i，以使闭环系统有特征值$-2, -2, -1, -1\pm j$，，即实现期望的多项式

$$s^5+7s^4+20s^3+30s^2+24s+8$$

加了状态反馈后的系统矩阵

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & k_2 & k_3-1 & k_4 & k_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -k_1 & -k_2 & 11-k_3 & -k_4 & -k_5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

它的特征式为

$$s^5+(k_4-k_2)s^4+(k_3-k_1-11)s^3+(10k_2-k_5)s^2+10k_1s+10k_5$$

比较上面两个多项式同次幂的系数，可以求出反馈增益阵为

k=[2.4　3.08　33.4　10.08　0.8]

并且得到闭环系统方程

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2.4 & 3.08 & 32.4 & 10.08 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2.4 & -3.08 & -22.4 & -10.08 & -0.8 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A_1}} \begin{bmatrix} x \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4w \\ 0 \\ 6w \\ -y_0 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix}$$

3）验证上式的稳态特征：

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\mathbf{c}(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1}\begin{bmatrix} d \\ -y_0 \end{bmatrix}\frac{1}{s} = \mathbf{c}(-\mathbf{A}_1)^{-1}\begin{bmatrix} d \\ -y_0 \end{bmatrix}$$

$$= -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3.85 & -2.8 & -12.6 & -4.05 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d \\ -y_r \end{bmatrix} = y_r$$

可见$y(t)$最终趋近于稳态值y_r，这正是所期望的结果。

本小节中讨论的跟踪问题中，干扰和输入信号均为常值向量，在一些工业控制中（如调速系统等）是有用的。

在飞行控制或导弹控制中，由于干扰具有随机性，欲跟踪的目标高度机动，采用现在所介绍的控制方式显然是不适宜的。这往往需要引入复杂得多的控制方式，如自适应控制或其它非线性控制方式等。

作业： P.140,4.7-4.9

用状态反馈进行解耦控制

用状态反馈进行解耦控制

一、解耦问题的提法

1. 解耦系统的定义

系统动态方程为

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u, \quad y = \mathbf{C}x \qquad (4\text{-}32)$$

这里A、B、C分别为$n\times n$、$n\times p$、$p\times n$的矩阵。$p=q$，即这是一个方阵解耦问题。

系统的传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}(s)_{q\times p}\Big|_{q=p} = \mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} \qquad (4\text{-}33)$$

定义 若(A, B, C) 的传函阵$G(s)_{p=q}$是对角形非奇异矩阵，则称系统(4-32)是解耦的。

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix} \frac{n_1(s)}{d_1(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ & \frac{n_2(s)}{d_2(s)} & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & \frac{n_p(s)}{d_p(s)} \end{bmatrix}$$

$\frac{n_i(s)}{d_i(s)}$不恒为零。

2.利用状态反馈解耦：问题的提法

- 方解耦问题，即$p=q$；$\dot{x}=\mathbf{A}x+\mathbf{B}u$，　$y=\mathbf{C}x$
- 状态反馈控制律为

$$u=\mathrm{K}x+\mathrm{H}v \quad (\mathrm{H}\text{为非奇异阵}) \tag{4-34}$$

其中　$\mathbf{K}\in\mathbf{R}^{p\times n}$为状态反馈增益阵

$\mathbf{H}\in\mathbf{R}^{p\times p}$为非奇异的输入变换阵。

$$\dot{x}=(\mathbf{A}+\mathbf{BK})x+\mathbf{BH}v,\quad y=\mathbf{C}x$$

经状态反馈后的闭环传递矩阵为对称非奇异的：

$$\mathbf{G}_f(s,\mathbf{K},\mathbf{H})=\mathbf{C}[s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})]^{-1}\mathbf{BH}$$

状态反馈解耦问题的提法的数学等价提法：

找出矩阵K、H，使

$$\mathbf{G}_f(s,\mathbf{K},\mathbf{H}) = \mathbf{C}[s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})]^{-1}\mathbf{BH}$$

为对角、非奇异阵：

$$\mathbf{G}_f(s) = \begin{bmatrix} g_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ & g_2(s) & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & g_p(s) \end{bmatrix}, g_i(s) \not\equiv 0$$

二、开、闭环传递函数阵的解耦表示

1. 开、闭环传递函数矩阵的关系

引理 1：开环传递矩阵和闭环传递矩阵有如下关系：

$$\mathbf{G}_f(s)=\mathbf{C}[s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{H}$$

$$=\mathbf{G}(s)[\mathbf{I}-\mathbf{K}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{H} \qquad (4-37)$$

$$=\mathbf{G}(s)[\mathbf{I}+\mathbf{K}(s\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}]\mathbf{H}$$

其中，$\mathbf{G}_f(s)$和$\mathbf{G}(s)$分别为闭环和开环传递矩阵。

证明：用到恒等式 $\mathbf{A}[\mathbf{I}-\mathbf{B}\mathbf{A}]^{-1}=[\mathbf{I}-\mathbf{A}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{A}$

$$(\mathbf{I}-\mathbf{X}\mathbf{Y})^{-1}=\mathbf{I}+\mathbf{X}(\mathbf{I}-\mathbf{Y}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{Y}$$

2. 开环传递矩阵$G(s)$的结构特性指数d_i及特性向量 E_i

例： 已知系统 $g(s)=1/(s^3+3s^2+2s+1)$的一个实现为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

可将$g(s)$表示成

$$g(s)=\mathbf{c}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}=\frac{\mathbf{cb}}{s}+\frac{\mathbf{cAb}}{s^2}+\frac{\mathbf{cA}^2\mathbf{b}}{s^3}\cdots+\frac{\mathbf{cA}^{k-1}\mathbf{b}}{s^k}+\cdots$$

则可验证，级数的前两项为零，而第三项不为零。

一般地，记C的第i行为$\mathbf{c}_i$；$\mathbf{G}(s)$的第i 行为$\mathbf{G}_i(s)$，即

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\\ \mathbf{c}_2(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\\ \vdots\\ \mathbf{c}_i(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\\ \vdots\\ \mathbf{c}_p(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{G}_1(s)\\ \mathbf{G}_2(s)\\ \vdots\\ \mathbf{G}_i(s)\\ \vdots\\ \mathbf{G}_p(s)\end{bmatrix}$$

则可将$\mathbf{G}_i(s)$表示成

$$\mathbf{G}_i(s)=\mathbf{c}_i(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\underbrace{\frac{\mathbf{c}_i\mathbf{B}}{s}+\frac{\mathbf{c}_i\mathbf{A}\mathbf{B}}{s^2}+\cdots+\frac{\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i-1}\mathbf{B}}{s^{d_i}}+\frac{\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{B}}{s^{d_i+1}}}_{\text{共 } d_i \text{ 项}}+\cdots$$

若在上式中，

$$\mathbf{c}_i\mathbf{B}=\mathbf{c}_i\mathbf{A}\mathbf{B}=\cdots=\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i-1}\mathbf{B}=0 \quad (\text{共有}d_i\text{项})$$

但$\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{B}/s^{d_i+1}$ 中

$$\mathbf{E}_i:=\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{B}\neq 0,$$

则我们得到了一个非零向量 E_i 及非负整数

$$d_i\geq 0$$

d_i 是上式中由左向右 s 负幂次系数是零的项的个数，它等价于使

$$\mathbf{E}_i:=\lim_{s\to\infty}s^{d_i+1}\mathbf{G}_i(s)=\lim_{s\to\infty}s^{d_i+1}\mathbf{c}_i(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\neq\mathbf{0}$$

的最小正整数。因此，根据上述d_i和$\mathbf{E}_i$的定义，

$$\mathbf{E}_i = \lim_{s\to\infty} s^{d_i+1}\mathbf{G}_i(s) = c_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{B} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{s\to\infty} s^{d_i+1}\Big(\underbrace{\frac{\mathbf{c}_i\mathbf{B}}{s} + \cdots + \frac{\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i-1}\mathbf{B}}{s^{d_i}}}_{0} + \frac{\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{B}}{s^{d_i+1}} + \cdots\Big) \neq 0 \qquad (4\text{-}39)$$

$d_i = G_i(s)$传递函数分母分子多项式次数之差最小值-1

以上分析表明，对两种表达方式：G(s)和(A,B,C)，我们均可以求得d_i和 E_i 。

例题1 给定如下的G(s)，试计算 d_i 和 E_i

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{s+2}{s^2+2s+1} & \dfrac{1}{s^2+s+2}\\ \dfrac{1}{s^2+2s+1} & \dfrac{3}{s^2+2s+4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}G_1(s)\\ G_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\\ \mathbf{c}_2(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}$$

解 $d_1=\min\{1,2\}-1=0$ ， $d_2=\min\{2,2\}-1=1$

故根据定义：

$$\mathbf{E}_i=\lim_{s\to\infty}s^{d_i+1}\mathbf{G}_i(s)=c_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{B}\neq 0$$

我们有

$$\mathbf{E}_1 = \lim_{s\to\infty} s\mathbf{G}_1(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{c}_1\mathbf{A}^{d_1=0}\mathbf{B}$$

$$\Rightarrow \mathbf{E}_1 = \mathbf{c}_1\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$$

$$\mathbf{E}_2 = \lim_{s\to\infty} s^2\mathbf{G}_2(s) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} = \mathbf{c}_2\mathbf{A}^{d_2=1}\mathbf{B}$$

$$\Rightarrow \mathbf{c}_2\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{c}_2\mathbf{A}^1\mathbf{B} \neq 0$$

例题4-5a 系统状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

试计算d_i和 E_i

解 $c_1B=[1\ 0]$, $d_1=0$; $E_1=[1\ \ 0]$

$c_2B=[0\ 1]$, $d_2=0$; $E_2=[0\ \ 1]$