用状态反馈进行解耦控制

2.利用状态反馈解耦：问题的提法

- 方解耦问题，即 $p=q$； $\dot{x}=\mathbf{A}x+\mathbf{B}u$， $y=\mathbf{C}x$

- 状态反馈控制律为

$$u=\mathbf{K}x+\mathbf{H}v \quad (\mathbf{H}\text{为非奇异阵}) \tag{4-34}$$

其中 $\mathbf{K}\in\mathbf{R}^{p\times n}$为状态反馈增益阵

$\mathbf{H}\in\mathbf{R}^{p\times p}$为非奇异的输入变换阵。

$$\dot{x}=(\mathbf{A}+\mathbf{BK})x+\mathbf{BH}v,\quad y=\mathbf{C}x$$

经状态反馈后的闭环传递矩阵为对称非奇异的：

$$\mathbf{G}_f(s,\mathbf{K},\mathbf{H})=\mathbf{C}[s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})]^{-1}\mathbf{BH}$$

状态反馈解耦问题的提法的数学等价提法：

找出矩阵**K**、**H**，使

$$\mathbf{G}_f(s,\mathbf{K},\mathbf{H}) = \mathbf{C}[s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})]^{-1}\mathbf{BH}$$

为对角、非奇异阵：

$$\mathbf{G}_f(s) = \begin{bmatrix} g_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ & g_2(s) & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & g_p(s) \end{bmatrix}, g_i(s) \not\equiv 0$$

3. 闭环传递函数阵的解耦形式

1）开环传递函数矩阵基于结构特征的表示法

引入结构特性指数 d_i 及结构特性向量$\mathbf{E}_i$后， 记

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_1\\ \mathbf{E}_2\\ \vdots\\ \mathbf{E}_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1\mathbf{A}^{d_1}\mathbf{B}\\ \mathbf{c}_2\mathbf{A}^{d_2}\mathbf{B}\\ \vdots\\ \mathbf{c}_p\mathbf{A}^{d_p}\mathbf{B}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}\mathbf{F}_1\\ \mathbf{F}_2\\ \vdots\\ \mathbf{F}_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1\mathbf{A}^{d_1+1}\\ \mathbf{c}_2\mathbf{A}^{d_2+1}\\ \vdots\\ \mathbf{c}_p\mathbf{A}^{d_p+1}\end{bmatrix}$$

开环传递函数阵的第i行可以表示为下式：

$$\mathbf{c}_i(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \frac{1}{s^{d_i+1}}(\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{B} + \mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i+1}\mathbf{B}\frac{1}{s} + \cdots)$$

$$= \frac{1}{s^{d_i+1}}[\underbrace{\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{B}}_{\mathbf{E}_i} + \underbrace{\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i+1}}_{\mathbf{F}_i}\underbrace{(\mathbf{I}\frac{1}{s} + \mathbf{A}\frac{1}{s^2} + \mathbf{A}^2\frac{1}{s^3} + \cdots)}_{(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}}\mathbf{B}]$$

$$= \frac{1}{s^{d_i+1}}[\mathbf{E}_i + \mathbf{F}_i(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]$$

开环传递函数阵可以表示为:

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}\mathbf{G}_1(s)\\ \mathbf{G}_2(s)\\ \vdots\\ \mathbf{G}_p(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s^{d_1+1}}[\mathbf{E}_1+\mathbf{F}_1(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]\\ \dfrac{1}{s^{d_2+1}}[\mathbf{E}_2+\mathbf{F}_2(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]\\ \vdots\\ \dfrac{1}{s^{d_p+1}}[\mathbf{E}_p+\mathbf{F}_p(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s^{d_1+1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{1}{s^{d_p+1}}\end{bmatrix}[\mathbf{E}+\mathbf{F}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]$$

2）闭环传递函数矩阵的解耦表示法

利用（4-37)式:

$$\mathbf{G}_f(s) = \mathbf{C}[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{H}$$

$$= \mathbf{G}(s)[\mathbf{I} + \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}]\mathbf{H}$$

$$= \mathbf{G}(s)[\mathbf{I} - \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{H} \qquad (4-37)$$

可将闭环传递函数阵表为：

$$\mathbf{G}_f(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s^{d_1+1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s^{d_p+1}}\end{bmatrix}[\mathbf{E}+\mathbf{F}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}][\mathbf{I}+\mathbf{K}(s\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}]\mathbf{H} \quad (S-1)$$

或

$$\mathbf{G}_f(s)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s^{d_1+1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{s^{d_p+1}}\end{bmatrix}[\mathbf{E}+\mathbf{F}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}][\mathbf{I}-\mathbf{K}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{H} \quad (S-2)$$

4. 闭环系统$\mathbf{G}_f(s)$的结构特性指数$\bar{d}_i$及结构特性向量$\bar{\mathbf{E}}_i$

按照非负整数d_i及非零向量$\mathbf{E}_i$ 的定义，我们可以得到闭环传函阵所对应的 $\bar{d}_i$， $\bar{\mathbf{E}}_i$ 。注意到

$$\mathbf{G}_f(s)=\begin{bmatrix}\mathbf{G}_{f1}(s)\\ \vdots\\ \vdots\\ \mathbf{G}_{fp}(s)\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{fi}(s)=\mathbf{c}_i[s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})]^{-1}\mathbf{BH}=\mathbf{c}_i\mathbf{BH}\frac{1}{s}$$

$$+\mathbf{c}_i(\mathbf{A}+\mathbf{BK})\mathbf{BH}\frac{1}{s^2}+\cdots+\mathbf{c}_i(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^k\mathbf{BH}\frac{1}{s^{k+1}}+\cdots$$

故存在 $\bar{d}_i$、 $\bar{\mathbf{E}}_i$ ，使得

$$\bar{\mathbf{E}}_i := \mathbf{c}_i(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{\bar{d}_i}\mathbf{BH} \neq 0,$$

$$\mathbf{c}_i(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{k}\mathbf{BH} = 0, k < \bar{d}_i$$

引理2： $\bar{d}_i = d_i$, $\bar{\mathbf{E}}_i = \mathbf{E}_i\mathbf{H}$。

证明： 只要证明

$$\mathbf{c}_i(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{d_i}\mathbf{BH} = \mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{BH} \neq 0,$$

而

$$\mathbf{c}_i(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{k}\mathbf{BH} = 0 \ (k < d_i)$$

即可。

为此，先证明：

$$\mathbf{c}_i(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^k = \mathbf{c}_i\mathbf{A}^k,\quad k=0,1,2,\cdots,d_i$$

开环：

$$\mathbf{E}_i := c_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{B} \neq 0$$

$$c_i\mathbf{A}^k\mathbf{B} = 0, k < d_i$$

由k=0、1,⋯. . . , 依次证明即可。

于是：

1） $k=0,1,\cdots,d_i-1$时， $\mathbf{c}_i(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^k\mathbf{BH} = \mathbf{c}_i\mathbf{A}^k\mathbf{BH} = 0;$

2） $\mathbf{c}_i(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{d_i}\mathbf{BH} = \mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{BH} = \mathbf{E}_i\mathbf{H} := \bar{\mathbf{E}}_i$。

同时有 $d_i = \bar{d}_i$。

证**完。**

三、系统可解耦的条件

定理4-9 系统

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u, \quad y = \mathbf{C}x \qquad (4\text{-}32)$$

可用反馈$u=\mathbf{K}x+\mathbf{H}v$ 进行动态解耦的充分必要条件是如下定义的矩阵**E**为非奇异的，即

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1\mathbf{A}^{d_1}\mathbf{B} \\ \mathbf{c}_2\mathbf{A}^{d_2}\mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p\mathbf{A}^{d_p}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

非奇异。

证明：必要性。只要证明$\mathbf{E}$非奇异就可以了。

若系统可用状态反馈$u=\mathbf{K}x+\mathbf{H}v$解耦，于是$\mathbf{G}_f(s)$对角且非奇异：

$$\mathbf{G}_f(s)=\begin{bmatrix} g_1(s)=\dfrac{n_1(s)}{d_1(s)} & 0 & \cdots & 0 \\ & g_2(s)=\dfrac{n_2(s)}{d_2(s)} & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & g_p(s)=\dfrac{n_p(s)}{d_p(s)} \end{bmatrix}$$

其中$g_i(s)$为传递函数。

故存在非负整数$\bar{d}_i$及$\bar{\mathbf{E}}_i$,满足.

$$\bar{\mathbf{E}}_i := \lim_{s\to\infty} s^{\bar{d}_i+1}\mathbf{G}_{fi}(s) = \lim_{s\to\infty} s^{d_i+1}\mathbf{G}_{fi}(s)$$

$$= \lim_{s\to\infty} s^{\bar{d}_i+1}\left[0,\ldots,0,\quad \frac{n_i(s)}{d_i(s)},0 \quad \cdots,0\right]$$

$$= [\ldots \quad c_i \quad \cdots] \neq 0$$

$$\Rightarrow \bar{\mathbf{E}} = \mathrm{diag}\{c_1 \quad \cdots \quad c_{p-1} \quad c_p\} \Rightarrow \bar{\mathbf{E}}\text{非奇异}$$

且

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{E}\mathbf{H}$$

故知$\mathbf{E}$非奇异。

充分性: 将

$$\mathbf{K}=-\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}\,,\quad \mathbf{H}=\mathbf{E}^{-1}$$

代入(S-2)可得

$\mathbf{K}=-\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}$

$\mathbf{H}=\mathbf{E}^{-1}$

$$\mathbf{G}_f(s)=\underbrace{\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s^{d_1+1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{1}{s^{d_p+1}}\end{bmatrix}[\mathbf{E}+\mathbf{F}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]}_{\text{开环}}[\mathbf{I}+\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{E}^{-1}=$$

$$
=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s^{d_1+1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \dfrac{1}{s^{d_p+1}} \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}49)
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
&[\mathbf{I}+\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{E}^{-1} \\
&=[\mathbf{E}+\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]^{-1} \\
&=[\mathbf{E}+\mathbf{F}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}。
\end{aligned}
$$

积分器解耦系统

注1：定理的充分性证明给出了使系统解耦时，反馈信号 $u=\mathbf{K}x+\mathbf{H}v$ 中矩阵 **K** 和 **H** 的求法：

$$\mathbf{K}=-\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F},\quad \mathbf{H}=\mathbf{E}^{-1}$$

注2：由上式可知，闭环传函阵的McMillan阶为：

$$\delta \mathbf{G}_f(s)=d_1+d_2+\cdots+d_p+p$$

若 $d_1+d_2+\cdots+d_p+p<n,$

且原系统可控、可观测，因采用状态反馈不改变可控性，这时闭环动态方程是不可观的。说明这一解耦的状态反馈改变了系统的可观测性。若 $\delta \mathbf{G}_f(s)=n$ 是否可以进一步配置极点？

例题4-5 将例题4-5a中的系统化为积分器解耦系统，并问解耦是否与稳定相矛盾。

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

我们已经计算出 d_i 和 $\mathbf{E}_i$如下：

$$\begin{aligned}&\mathbf{c}_1\mathbf{B}=[1\ 0], \quad d_1=0; \qquad \mathbf{E}_1=[1\ \ 0]\\ &\mathbf{c}_2\mathbf{B}=[0\ 1], \quad d_2=0; \qquad \mathbf{E}_2=[0\ \ 1]\end{aligned} \quad \Rightarrow \mathbf{E}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

于是，根据定理4-9，只需要计算：

$$\mathbf{K}=-\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}, \quad \mathbf{H}=\mathbf{E}^{-1}, \text{其中，} \mathbf{F}=\begin{bmatrix}c_1\mathbf{A}^{d_1+1}\\ c_2\mathbf{A}^{d_2+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\mathbf{A}\\ c_2\mathbf{A}\end{bmatrix}$$

故系统可解耦，可将其化为积分器解耦系统。

计算F阵， $\mathbf{F}_1=c_1\mathbf{A}=[0\ 0\ 1]$， $\mathbf{F}_2=c_2\mathbf{A}=[-1\ -2\ -3]$，

故得

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & -2 & -3\end{bmatrix}$$

由此求得

$$\mathbf{H}=\mathbf{E}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\qquad \mathbf{K}=-\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix},$$

$\mathbf{K}=-\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}$， $\mathbf{H}=\mathbf{E}^{-1}$，其中， $\mathbf{F}=\begin{bmatrix}c_1\mathbf{A}^{d_1+1}\\ c_2\mathbf{A}^{d_2+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1\mathbf{A}\\ c_2\mathbf{A}\end{bmatrix}$

$$u=\mathbf{K}x+\mathbf{H}v=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}v$$

故反馈控制律 $u = \mathbf{K}x + \mathbf{H}v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v$

闭环系统动态方程为

$$\dot{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{BK})x + \mathbf{BH}v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

闭环系统的传递函数矩阵

$$\mathbf{G}_f(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

反馈前系统可控可观，而闭环系统不可观测。这一解耦的状态反馈改变了系统的可观测性。

这说明有可观测的模态被消去了，闭环系统不可观测。

四. 一种基于极点配置的解耦控制律

定理4-10: 若系统可用状态反馈解耦，且

$$(d_1+1)+(d_2+1)+\cdots+(d_p+1)$$
$$=d_1+d_2+\cdots+d_p+p=n,$$

则采用状态反馈

$$\mathbf{H}=\mathbf{E}^{-1},$$

$$\mathbf{K}=-\mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}=-\mathbf{E}^{-1}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1(\mathbf{A}^{d_1+1}+k_{1d_1}\mathbf{A}^{d_1}+\cdots+k_{11}\mathbf{A}+k_{10}\mathbf{I})\\ \mathbf{c}_2(\mathbf{A}^{d_2+1}+k_{2d_2}\mathbf{A}^{d_2}+\cdots+k_{21}\mathbf{A}+k_{20}\mathbf{I})\\ \vdots\\ \mathbf{c}_i(\mathbf{A}^{d_i+1}+k_{id_i}\mathbf{A}^{d_i}+\cdots+k_{i1}\mathbf{A}+k_{i0}\mathbf{I})\\ \vdots\end{bmatrix}}_{\mathbf{D}}$$

可以将闭环传函矩阵化为

$$\mathbf{G}_f(s)=\begin{bmatrix} \frac{1}{f_1(s)} & 0 & & 0 \\ & \frac{1}{f_2(s)} & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & \frac{1}{f_p(s)} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 f_1(\mathbf{A}) \\ \mathbf{c}_2 f_2(\mathbf{A}) \\ \vdots \\ \mathbf{c}_p f_p(\mathbf{A}) \end{bmatrix}$$

$$f_i(s)=s^{d_i+1}+k_{id_i}s^{d_i}+k_{id_i-1}s^{d_i-1}+\cdots+k_{i1}s+k_{i0}$$

其中k_{ij}是可调参数，可用来对闭环传递函数矩阵的对角元进行极点配置。

注：由上式可知$\mathbf{G}_f(s)$的McMillan阶为n，说明这时解耦状态反馈律未改变系统的可观测性。

证明： 可用状态反馈解耦，故**E**非奇异。考虑关系式：

$$\mathbf{G}_f(s) = \mathbf{G}(s)[\mathbf{I} - \mathbf{K}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{H}$$

将$\mathbf{H}=\mathbf{E}^{-1}$和$\mathbf{K}= -\mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}$代入上式，有

$$\mathbf{G}_f(s) = \mathbf{G}(s)[\mathbf{E} + \mathbf{D}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}$$

于是只要证明

$$\underbrace{(s^{d_i+1} + k_{id_i}s^{d_i} + k_{id_i-1}s^{d_i-1} + \cdots + k_{i1}s + k_{i0})}_{f_i(s)}\mathbf{G}_i(s)$$

$$= [\mathbf{E}_i + \mathbf{D}_i(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]$$即可。

其中，

$$\mathbf{G}_i(s)=\mathbf{c}_i(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\frac{\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{B}}{s^{d_i+1}}+\frac{\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i+1}\mathbf{B}}{s^{d_i+2}}+\frac{\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i+2}\mathbf{B}}{s^{d_i+3}}+\cdots$$

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1(\mathbf{A}^{d_1+1}+k_{1d_1}\mathbf{A}^{d_1}+\cdots+k_{11}\mathbf{A}+k_{10}\mathbf{I})\\ \mathbf{c}_2(\mathbf{A}^{d_2+1}+k_{2d_2}\mathbf{A}^{d_2}+\cdots+k_{21}\mathbf{A}+k_{20}\mathbf{I})\\ \vdots\\ \mathbf{c}_i(\mathbf{A}^{d_i+1}+k_{id_i}\mathbf{A}^{d_i}+\cdots+k_{i1}\mathbf{A}+k_{i0}\mathbf{I})\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1f_1(\mathbf{A})\\ \mathbf{c}_2f_2(\mathbf{A})\\ \vdots\\ \mathbf{c}_pf_p(\mathbf{A})\end{bmatrix}$$

要证： $$\underbrace{(s^{d_i+1}+k_{id_i}s^{d_i}+k_{id_i-1}s^{d_i-1}+\cdots+k_{i1}s+k_{i0})}_{f_i(s)}\mathbf{G}_i(s)$$

$$=[\mathbf{E}_i+\mathbf{D}_i(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]$$

分以下步骤证明：

1)证明：$s^{d_i+1}\mathbf{G}_i(s)=\mathbf{E}_i+\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i+1}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B};\qquad (A.1)$

2)证明：$k_{id_i}s^{d_i}\mathbf{G}_i(s)=k_{id_i}\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B};\qquad (A.2)$

3)

$$k_{id_i-1}s^{d_i-1}\mathbf{G}_i(s)=k_{id_i-1}s^{d_i-1}\left(\frac{\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{B}}{s^{d_i+1}}+\frac{\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i+1}\mathbf{B}}{s^{d_i+2}}+\frac{\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i+2}\mathbf{B}}{s^{d_i+3}}+\cdots\right)$$

$$=k_{id_i-1}\left(\underbrace{\frac{\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i-1}\mathbf{B}}{s}}_{=0}+\frac{\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i}\mathbf{B}}{s^2}+\frac{\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i+1}\mathbf{B}}{s^3}+\frac{\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i+2}\mathbf{B}}{s^4}+\cdots\right)$$

$$=k_{id_i-1}\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{d_i-1}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B},\qquad (A.3)$$

4)采用3)的技巧，一般地，有：

$$k_{ij}s^{j}\mathbf{G}_i(s)=k_{ij}\mathbf{c}_i\mathbf{A}^{j}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}, \qquad (A.4)$$

$$j=d_i,d_i-1,\cdots,0; \quad i=1,2,\cdots,p$$

5）结合式(A.1)~(A.4)，有

$$(s^{d_i+1}+k_{id_i}s^{d_i}+k_{id_i-1}s^{d_i-1}+\cdots+k_{i1}s+k_{i0})\mathbf{G}_i(s)$$

$$=\mathbf{E}_i+\underbrace{\mathbf{c}_i\{\mathbf{A}^{d_i+1}+k_{id_i}\mathbf{A}^{d_i}+k_{id_i-1}\mathbf{A}^{d_i-1}+\cdots+k_{i0}\mathbf{A}^{0}\}}_{\mathbf{D}_i}\times$$

$$\times(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=[\mathbf{E}_i+\mathbf{D}_i(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}]$$

证完。

例题 系统动态方程为

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}x+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}u$$

$$y=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}x$$

问可否用状态反馈律 $u=\mathbf{K}x+\mathbf{H}v$, 将闭环传递函数阵变为

$$\mathbf{G}_f(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{s^2+3s+1}\end{pmatrix}$$

如有可能，求出**K**和**H**。

$$s^{d_1+1}+k_{10}=s+1\Rightarrow d_1=\mathbf{0}$$

$$k_{10}=1$$

$$s^{d_2+1}+k_{21d_2}s^{d_2}+k_{20}=s^2+3s+1$$

$$\Rightarrow d_2=1,k_{21}=3,k_{20}=1$$

解 $\mathbf{c}_1\mathbf{B}=[0 \quad -1]$， $d_1=0$； $\mathbf{c}_2\mathbf{B}=[0 \quad 0]$， $\mathbf{c}_2\mathbf{AB}=[2 \quad 1]$， $d_2=1$，

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_1\\ \mathbf{E}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix} \qquad d_1+d_2+p=0+1+2=3=n$$

于是，状态反馈律中的矩阵可选为

$$\mathbf{H}=\mathbf{E}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -2 & 0\end{bmatrix}, \qquad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1(\mathbf{A}+\mathbf{I})\\ \mathbf{c}_2(\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}+\mathbf{I})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 0 & 1\\ 18 & 16 & 14\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}=-\mathbf{E}^{-1}\mathbf{D}=-\mathbf{E}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{c}_1(\mathbf{A}+\mathbf{I})\\ \mathbf{c}_2(\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}+\mathbf{I})\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10.5 & -8 & -7.5\\ 3 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

例题 系统动态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&2&0\\0&1&3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\\0&0\end{bmatrix}u,\qquad y=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}x$$

1）问可否用状态反馈律，将闭环化为积分器解耦系统（要求出**K**和**H**）？若能，写出解耦后的闭环传递矩阵；

2）问这个系统，解耦的同时是否改变系统的可观测性？消掉的不可观测模态是否稳定?

解 $\mathbf{c}_1\mathbf{B}=[1 \quad 1]$, $d_1=0$; $\mathbf{c}_2\mathbf{B}=[-1 \quad 1]$, $d_2=0$,

$$\mathbf{E}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_1\\ \mathbf{E}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

故系统可用状态反馈解耦。

$$\mathbf{K}=-\mathbf{E}^{-1}\mathbf{F}=-\underbrace{\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}}_{E^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 3\end{bmatrix}}_{F}$$

$$=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2}\\ -\frac{1}{2} & -2 & -\frac{3}{2}\end{bmatrix}}_{K}$$

解耦后的传递矩阵是：

$$\mathbf{G}_f(s)=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{s} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{s} \end{pmatrix}$$

不难验证，原系统是可控可观的，但经反馈后有

$$d_1+d_2+p=0+0+2=2<3=n$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{BK}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{BK})=s^2(s-2)$$

这说明有一个不稳定的根$s=2$是不可观测的极点，被消去了，系统解耦同时改变了可观测性。

五、方系统$(p=q)$ 动态解耦问题　小结

1.　若 $|\mathbf{E}| \neq 0$, 系统可用 $u=\mathbf{K}x+\mathbf{H}v$ 动态解耦；

2.　若系统可用 $u=\mathbf{K}x+\mathbf{H}v$ 动态解耦，

且　$d_1+d_2+\cdots+d_p+p=n$,　则可用定理4-10实现解耦，并且对角元传递函数的极点可任意配置；

若 $d_1+d_2+\cdots+d_p+p<n$,

有 $n-(d_1+d_2+\cdots+d_p+p)$ 个模态不可观，这些模态的属性(稳定与否)就需进一步研究。

静态解耦

一、静态解耦的定义

定义4—2 若一个**稳定系统**

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u, \quad y = \mathbf{C}x$$

具有对角形非奇异的静态增益矩阵，则称系统是静态(方)解耦的：

$$\mathbf{G}(0) = \begin{bmatrix} G_{11}(0) & & & \\ & \ddots & & \\ & & G_{ii}(0) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}_{p\times p,\ p=q}, \quad G_{ii}(0) \neq 0 \quad (*)$$

注意：稳定性条件必不可少。例如，对静态解耦系统，若

$$u=\alpha\mathbf{1}(t),\quad \alpha=[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_p]^T$$

稳定性意味可利用终值定理：

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{y}(t)=\lim_{s\to 0} s\underbrace{\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}}_{\mathbf{G}(s)}\mathbf{u}$$

$$=\begin{bmatrix} G_{11}(0) & & & \\ & \ddots & & \\ & & G_{ii}(0) & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_p\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} y_i(t)=G_{ii}(0)\alpha_i$$

二、静态解耦问题提法和可静态解耦的条件

若开环系统(**A**,**B**,**C**)不是静态解偶，现在考虑采用状态反馈规律$u=\mathbf{K}x+\mathbf{H}v$，使得闭环系统静态解耦。加上反馈的闭环系统为:

$$\dot{x}=(\mathbf{A}+\mathbf{BK})x+\mathbf{BH}v$$

因此，只要使得$\mathbf{G}_f(s)$稳定时$\mathbf{G}_f(0)$具有(*)式的特征就可以了。

传递函数阵为:

$$\mathbf{G}_f(s)=\mathbf{C}[s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})]^{-1}\mathbf{BH}$$

下面研究稳态时，

$$\mathbf{G}_f(0) = -\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{H}$$

可解耦的条件。

事实上，若经反馈后的系统是稳定的，只要证明

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}$$

非奇异就可以了。

定理4—15 使系统能静态解耦的充分必要条件是**状态反馈能使系统稳定，且**

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \qquad (4\text{-}63)$$

证明 充分性。若**K**可使系统稳定，说明（**A**+**BK**）是非奇异阵，输出可以进入稳态。由于（4—63）成立，而

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{BK} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{K} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}63)^*$$

所以等式**左端**的矩阵也是非奇异阵。又因为

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{BK} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ -\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{BK} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

$$=\det\begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{BK} & \mathbf{B} \\ 0 & -\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

$$=\det(\mathbf{A}+\mathbf{BK})\det[-\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}]$$

所以可知 $\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}$ 非奇异。取

$$\mathbf{H} = -[\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{M},$$

这里**M**为对角形非奇异阵，显然这时

$$\mathbf{G}_f(0) = \mathbf{M} = diag\{G_{11}(0) \quad G_{22}(0) \quad \cdots \quad G_{pp}(0)\}$$

系统实现了静态解耦。

必要性：由

$$\mathbf{G}_f(0) = \mathbf{C}[-(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})]^{-1}\mathbf{B}\mathbf{H}$$

对角形非奇异，实现静态解耦，可知

$$\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K})^{-1}\mathbf{B} \qquad \mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}$$

均非奇异，且**K**必须使系统能稳定；又因为

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{BK} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \det(\mathbf{A}+\mathbf{BK})\det[-\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}]$$

故由

$$\det(\mathbf{A}+\mathbf{BK})\det[-\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}] \neq 0$$

$$\Rightarrow \det\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

证完。

例4—7 考虑下列动态方程

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

不难验证这个系统是可控的，可以用状态反馈使之稳定。又有

$$\det\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$$

根据定理4—15，该系统可以静态解耦。但

$$\mathbf{c}_1\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{c}_2\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

E是奇异的，用状态反馈控制律不能使系统动态解耦。

算法：

1. 判断系统的可镇定性，若否，结束；若是

2. 判断 $\det\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \neq 0$

若否，不能静态解耦；若是

3. 找到状态反馈增益矩阵K使系统稳定；

4. 根据性能指标给定稳态后的非奇异对角矩阵M；

5. 计算 $-\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}$

6. 计算 $\mathbf{H}=-[\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{BK})^{-1}\mathbf{B}]^{-1}\mathbf{M}$

作业： P. 141， 11， 13, 15， 17

静态输出反馈与观测器

§5-1静态输出反馈和极点配置

一、静态输出反馈的性质

若给定线性时不变系统方程为

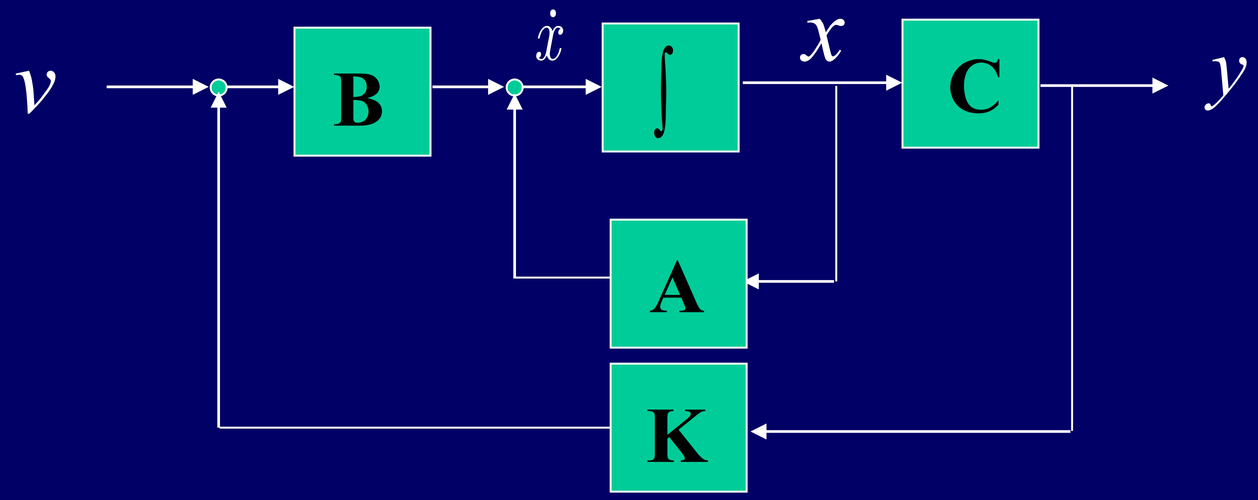
$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \qquad (5\text{-}1)$$
$$y = \mathbf{C}x$$

若取静态输出反馈控制律 $u = \mathbf{K}y + v$ (5-2)

可以得到闭环系统的动态方程为

$$\dot{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{BKC})x + \mathbf{B}v, \quad y = \mathbf{C}x \qquad (5-3)$$

$$\dot{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{BKC})x + \mathbf{B}v, \quad y = \mathbf{C}x$$



闭环系统结构图

定理5-1 输出反馈规律（5−2）不改变系统的可观测性。

证明 根据等式

$$\begin{bmatrix} s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{BKC}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \qquad (5\text{−}4)$$

由于（5-4）式右端第一个矩阵是非奇异阵，因此对任意的s和K，均有

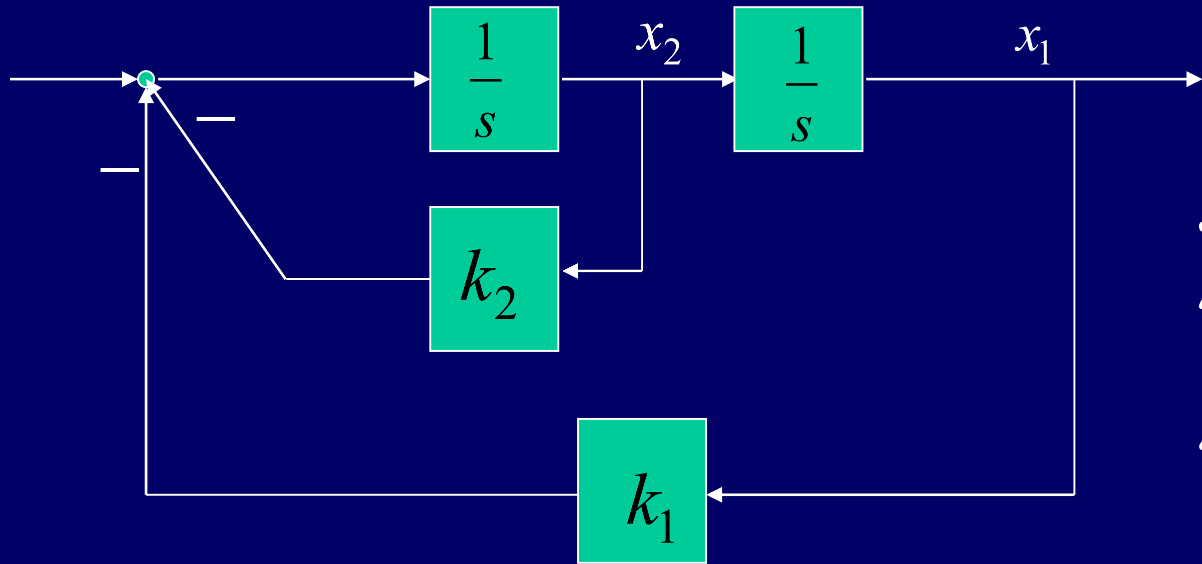
$$rank\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BKC}) \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-\mathbf{A} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} \qquad (5-5)$$

可见，系统（ A+BKC ， C）可观测的充分必要条件是系统（ A， C ）可观测。这表明**静态输出反馈不改变系统的可观测性**。 **证完。**

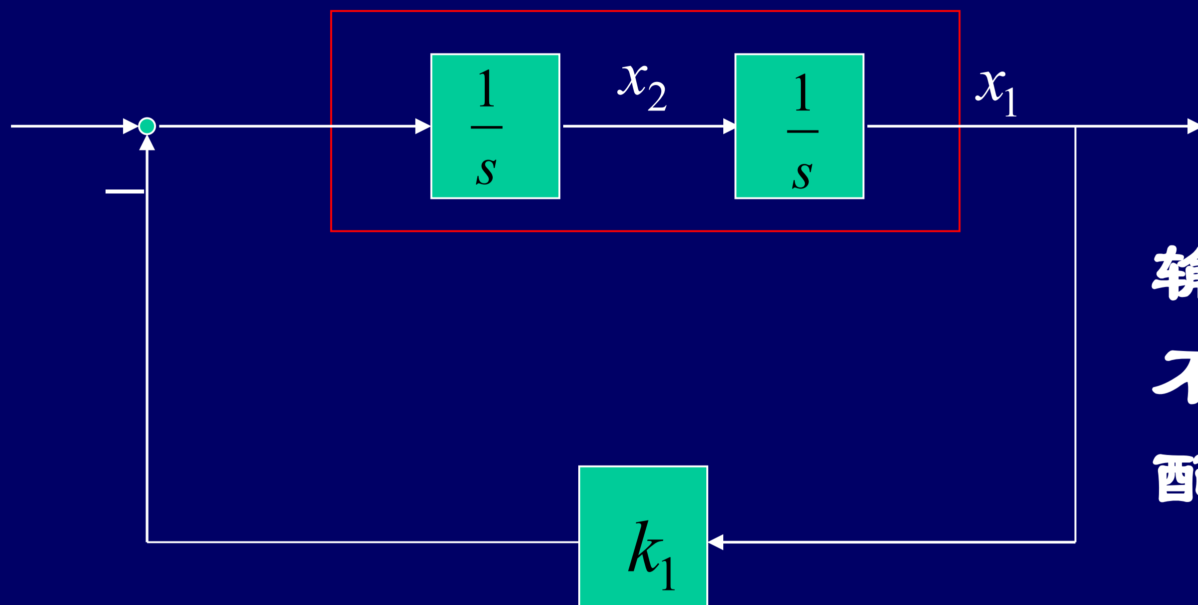
如果系统（A，C）不可观测，由（5-5）可知，**静态输出反馈不会改变系统的不可观测模态**。

推论： u=Ky+v 的反馈律不改变系统的可控性。

证明： 把（A+BKC）中的KC看作是状态反馈增益阵，而状态反馈不改变系统的可控性。 **证完。**



状态反馈可任意配置极点



输出反馈不可任意配置极点

输出反馈和状态反馈的区别

状态反馈与输出反馈比较（在极点配置方面）

1. 状态反馈： K是$p\times n$的矩阵。闭环特征方程

$$\det\ [sI-(A+BK)]$$

与期望多项式比较得到的是非线性方程（$p>1$）或线性方程（$p=1$）； $p>1$时可转化为$p=1$的情形，这时方程仍有解。

2. 输出反馈： **K是$p\times q$的矩阵。闭环特征方程**

$$\det\ [sI-(A+BKC)]$$

与期望多项式比较得到的一般是非线性方程。

参考文献： 郭雷主编，控制理论导论——从基本概念到研究前沿，科学出版社，2005.