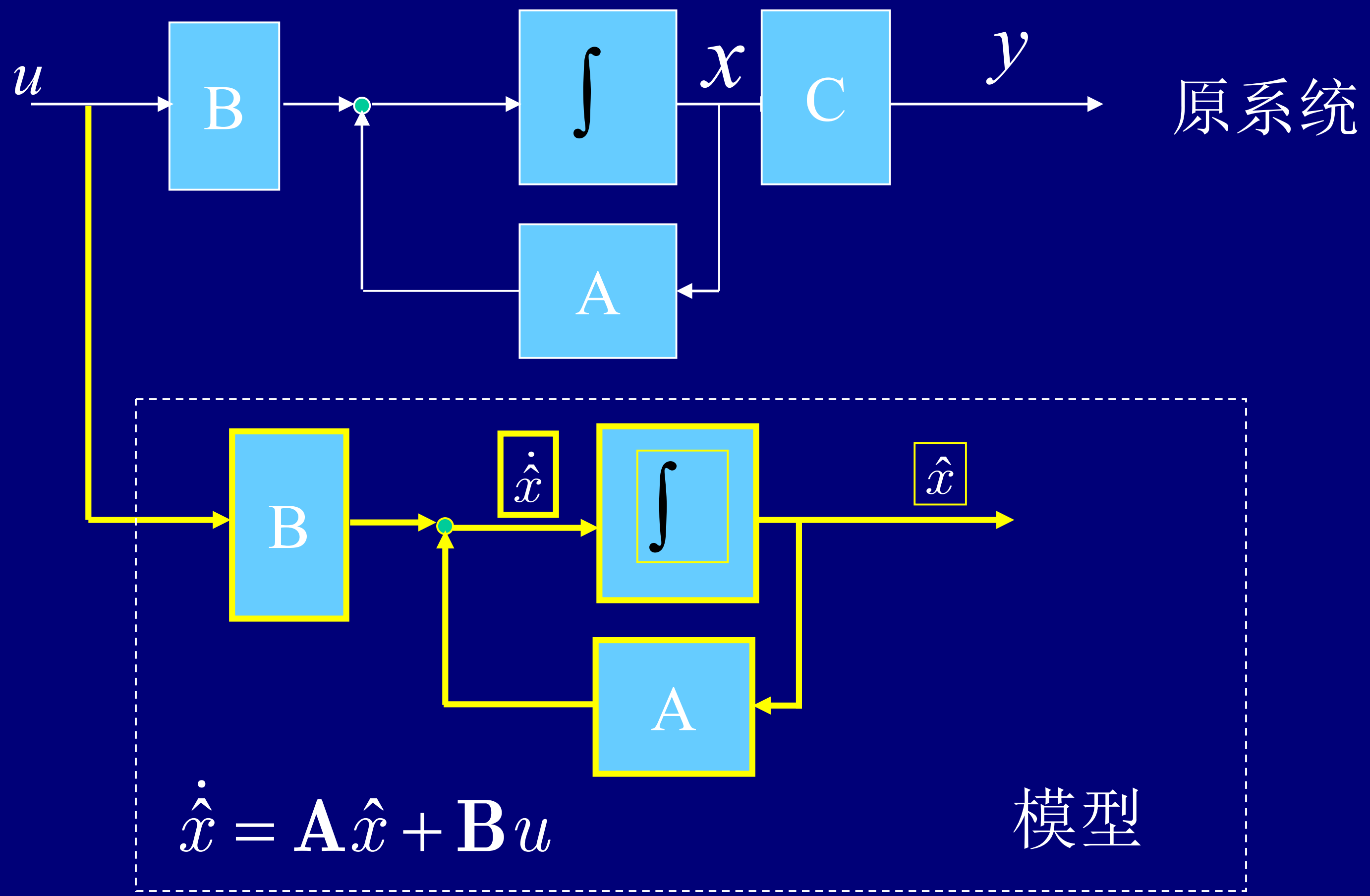
线性时不变系统的观测器

一、状态估计的方案及 Kx 观测器的定义

1. 状态观测器

最早的观测器是复制同样动态方程的模型系统，用模型系统的状态变量作为系统状态变量的估计值。



令误差

$$\tilde{x} := x - \hat{x}$$

则

$$\dot{\tilde{x}} := \mathbf{A}\tilde{x}$$

若系统可观测，通过输入/输出可确定出$x(0)$，并可将观测器的初始值 $\hat{x}(0)$ 设置得和原系统一样。

这种方案的主要缺点是：

1) 模型系统的**A**、**B** 难与真实系统一致，因此，很难满足误差

$$\lim_{t\to\infty}(x-\hat{x})=0 \qquad \forall x_0, \hat{x}_0, u$$

2) 每次运行均需要重新确定初始值。若两系统的初始值设置不同，且矩阵A又具有右半平面的极点，则误差将发散：

$$\tilde{x} = e^{\mathbf{A}t}\tilde{x}(0) \to \infty$$

由于以上方案未能利用系统的输出信息对误差进行校正，所以是一个开环估值。这种方案的抗干扰能力、稳定性和鲁棒性都是不能满足要求的。

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{A}\hat{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{G}(y - \mathbf{C}\hat{x}) = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\hat{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{G}y, \mathbf{G} \in \mathbf{R}^{n\times q}$$

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})x + \mathbf{B}u + \mathbf{G}\mathbf{y} \qquad \tilde{x} := x - \hat{x}$$

$$\dot{\tilde{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\tilde{x} + \mathbf{GC}x + \mathbf{B}u - \mathbf{B}u - \mathbf{G}y \Rightarrow \dot{\tilde{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\tilde{x}$$

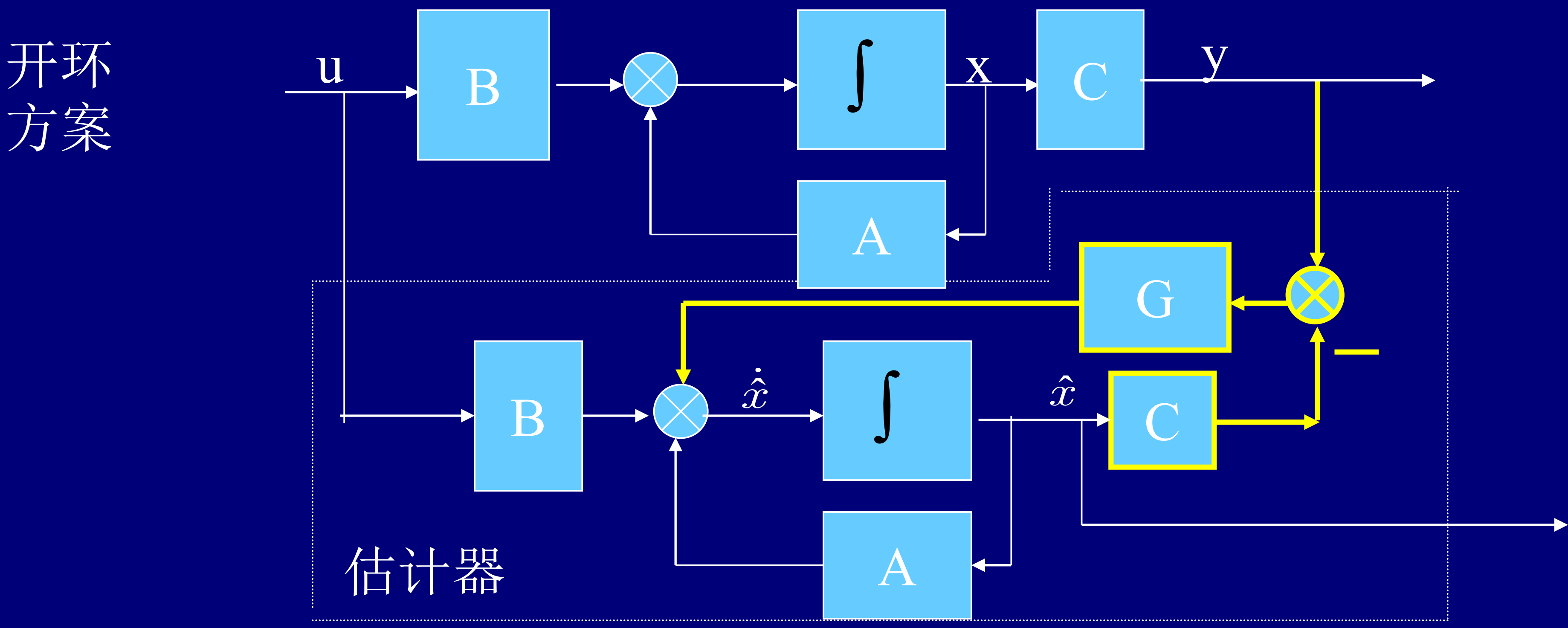


图5-3

在图5-3中虚线框出的部分称为状态观测器或状态估计器，它是一个动态系统，**以原系统的输入量u和输出量y作为它的输入量**，而观测器的输出量是原系统的状态变量的估计值 $\hat{x}$ ，应当满足

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{x}=\lim_{t\to\infty}(x-\hat{x})=0 \qquad \forall u, x(0)=x_0, \hat{x}(0)=\hat{x}_0$$

据图5-3所表示的关系可写出观测器部分的状态方程

$$\dot{\hat{x}}=\mathbf{A}\hat{x}+\mathbf{B}u+\mathbf{G}(y-\mathbf{C}\hat{x})=(\mathbf{A}-\mathbf{GC})\hat{x}+\mathbf{B}u+\mathbf{G}y$$

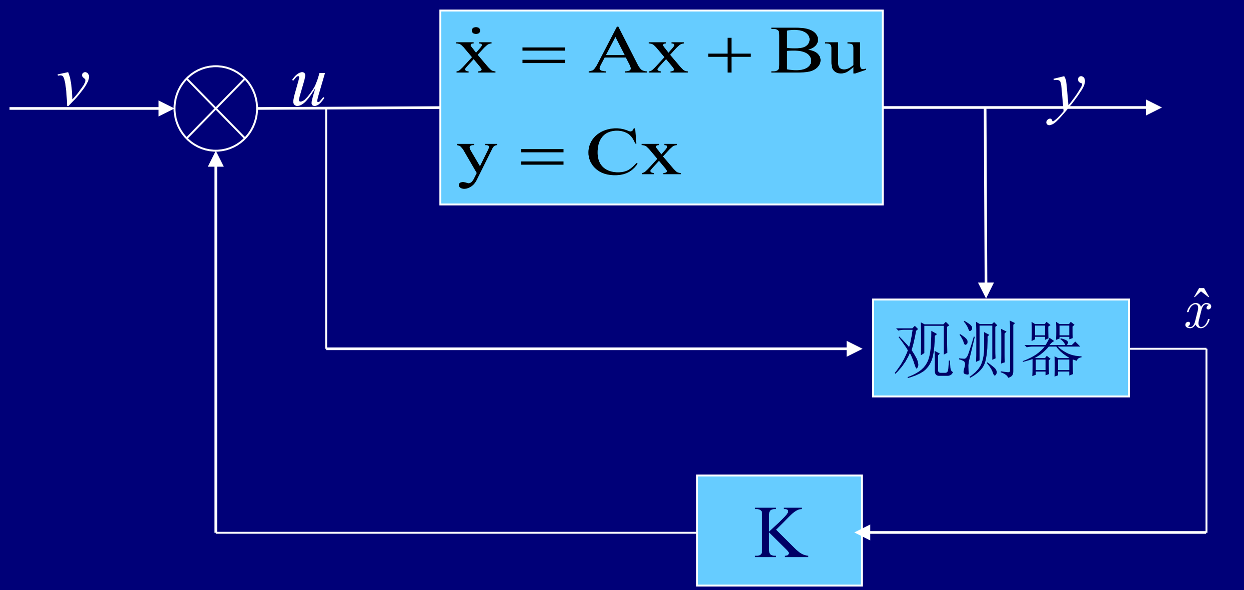
$$\dot{\hat{x}}=(\mathbf{A}-\mathbf{GC})\hat{x}+[\mathbf{B}\quad \mathbf{G}]\begin{bmatrix}u\\ y\end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \dot{\hat{x}}=\mathbf{A}_1\hat{x}+\mathbf{B}_1u_1, \quad \mathbf{A}_1:=\mathbf{A}-\mathbf{GC},\ \mathbf{B}_1:=[\mathbf{B}\quad \mathbf{G}], u_1:=\begin{bmatrix}u\\ y\end{bmatrix}$$

$$y_1=\mathbf{I}\hat{x}$$

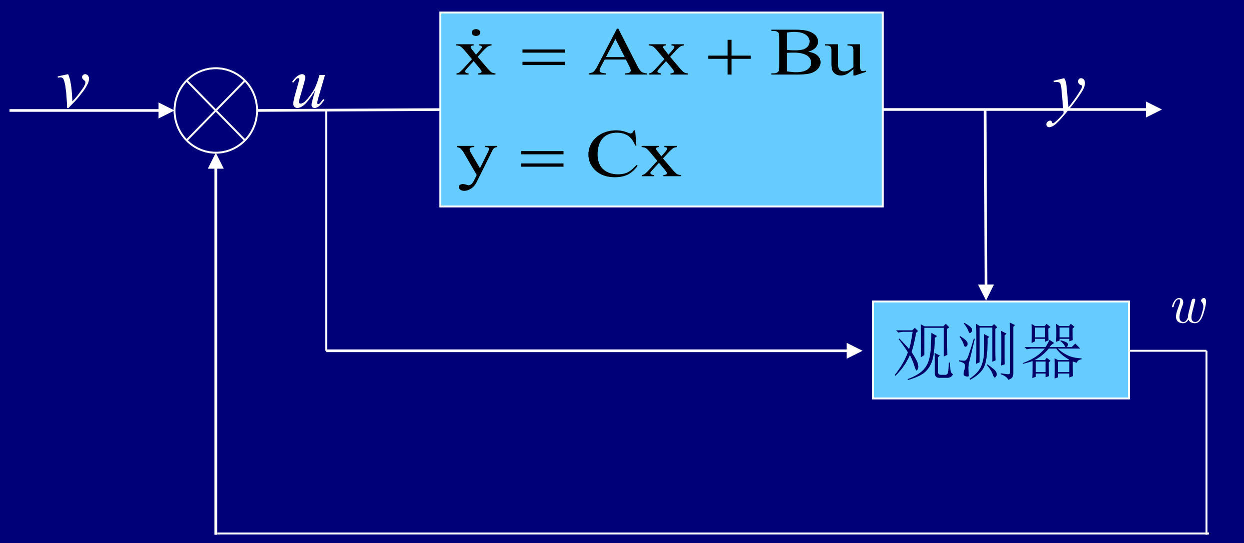
2. Kx 观 测 器

在某些工程实际问题中，产生状态估计值的目的是反馈量Kx，这里K是状态反馈阵。因此，完全可以直接讨论如何产生状态的线性组合 Kx 的估计值，而没有必要去产生状态的估计值x。直接构造 Kx 观测器有可能使观测器的维数降低，简化控制器的设计。



用n 维状态观测器作反馈：

$\hat{x} \in \mathbf{R}^n$
为估值。



用 $\mathbf{K}x$ 观测器作反馈：维数可以较低，容易实现。

$$\lim_{t\to\infty}(\mathbf{K}x - w) = 0, \quad \mathbf{K} \in \mathbf{R}^{l\times n} \quad , \forall x_0, z_0, u$$

定义5-1： 设线性时不变系统

$\sum$：(**A**，**B**，**C**）(x, y, u)

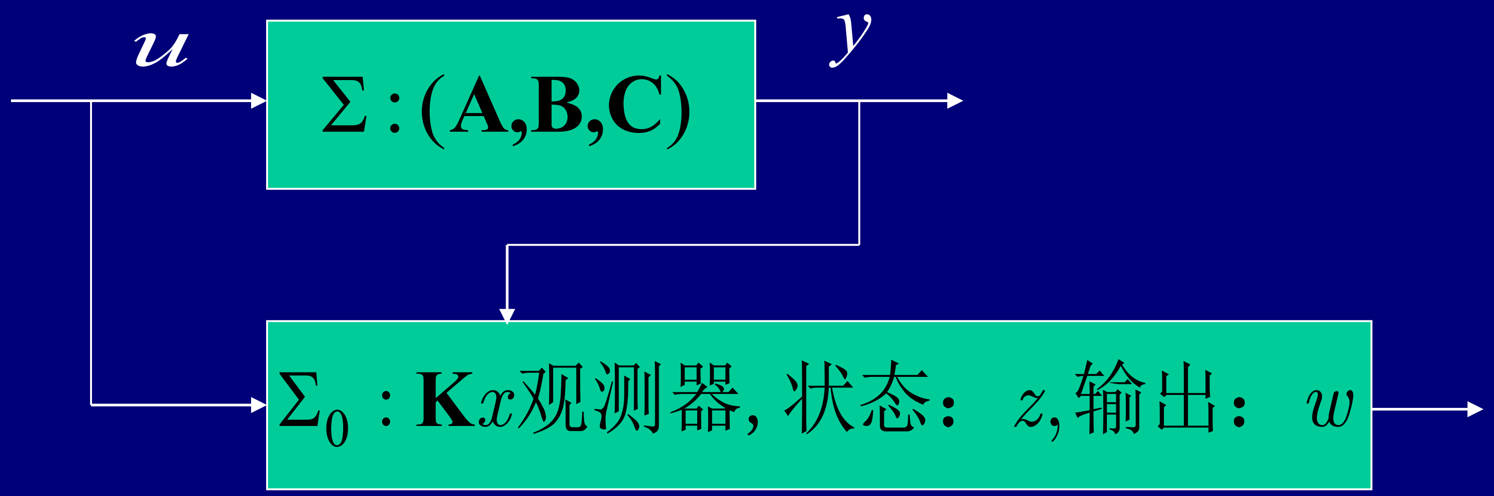
的状态是不能直接量测的，而另一状态变量为 z 的动态系统 $\sum_0$ 称为是系统$\sum$的 $\mathbf{K}x$ 观测器，如果 $\sum_0$ 以$\sum$的输入 u 和输出 y 为其输入，

$$\sum_0 : \begin{cases} \dot{z} = f(z, u, y), & z \in \mathbf{R}^r \\ w = g(z, u, y), & w \in \mathbf{R}^l \end{cases}$$

且对给定的常数矩阵**K**，$\sum_0$的输出w满足

$$\lim_{t \to \infty} (\mathbf{K}x - w) = 0, \quad \mathbf{K} \in \mathbf{R}^{l \times n} \quad , \forall x_0, z_0, u$$

若在上述定义中，**K=I**，则$\sum_0$称为状态观测器或状态估计器。



$$\dot{z} = f(z,\tilde{u}) = f(z,(u,y))$$

$$w = g(z,u,y)$$

满足 $\lim\limits_{t\to\infty}(\mathbf{K}x - w) = 0 \quad \forall x_0,\ z_0,\ u$

图： $\mathrm{K}x$ 观测器$\sum_0$， K=I时退化为状态观测器

什么条件下这样的状态观测器一定存在？

二、状态观测器的存在性、n 维基本状态观测器和 n 维基本$\mathbf{K}x$ 观测器

1.状态观测器的存在性

定理5-9 对线性时不变系统（**A**，**B**，**C**），若系统可检测（若系统中不可观测的模态是稳定模态，则称系统是可检测的。可检测是可镇定的对偶提法），则其状态观测器存在。

证明 因为（**A**，**B**，**C**）不是可观测时，可按可观测性进行结构分解，故这里不妨假定（**A**，**B**，**C**）已具有如下形式：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & 0\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\end{bmatrix}\qquad \mathbf{C}=[\mathbf{C}_1\quad 0]$$

其中($\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{C}_1$)可观测，$\mathbf{A}_{22}$的特征值具负实部。现构造如下的观测器动态系统

$$\dot{\hat{x}} = \mathbf{A}\hat{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{G}(y - \mathbf{C}\hat{x})$$

根据前面的分析误差系统：

$$\dot{\tilde{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\tilde{x}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & 0 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1 \\ \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C} = [\mathbf{C}_1 \quad 0]$$

有 $$\dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} - \mathbf{G}_1\mathbf{C}_1 & 0 \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{G}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}\tilde{x}$$

因为

$$(\mathbf{A}_{11}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}_1^{\mathrm{T}})$$

可控，适当选择 $\mathbf{G}_1^T$，可使

$$\mathbf{A}_{11}^{\mathrm{T}}-\mathbf{C}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_1^{\mathrm{T}}$$

的特征值均具负实部，亦即

$$\mathbf{A}_{11}-\mathbf{G}_1\mathbf{C}_1$$

的特征值均具负实部；而$\mathbf{A}_{22}$是系统的不可观测部分，由可检测的假定，$\mathbf{A}_{22}$的特征值具有负实部，故系统渐近稳定，即

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{x}=0,\qquad \forall\ x_0,\hat{x}_0,u$$

于是定理得证。 证完。

2. n 维基本状态观测器和 n 维基本 $\mathbf{K}x$ 观测器

定理5-9说明如果系统可检测，状态观测器总是存在的，并且观测器可取成（5-27）式的形式，即

$$\dot{\hat{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\hat{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{G}y \qquad (5-27)$$
$$w = \mathbf{I}\hat{x}$$

同样，$\mathbf{K}x$ 观测器也是存在的，可以取为

$$\dot{\hat{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\hat{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{G}y \qquad (5\text{-}28)$$
$$w = \mathbf{K}\hat{x}$$

（5-27）和（5-28）的观测器分别称为n维基本状态观测器和n维基本$\mathbf{K}x$观测器。

3.可任意配置观测器极点的条件

定理5-10 线性时不变系统（**A**，**B**，**C**）的状态观测器（5-27）可任意配置特征值的充分必要条件是（**A**，**C**）可观测。

证明 令定理5-9的证明中$\mathbf{A}_{22}$的维数为零，即可证明本定理。这个定理相当于（**A**，**B**，**C**）的极点用状态反馈可任意配置的对偶形式。 证完。

三、单输入单输出系统的状态观测器

对单输入、单输出系统，若(**A, b, c**) 可观测，状态观测器的极点配置问题可按以下步骤来解决：

1. 记 $\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$。

因原系统(**A, c**)可观测，对其作等价变换后有

$$\dot{\overline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & & & & -a_n \\ 1 & & & & -a_{n-1} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & -a_1 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{A}}} \overline{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{b}}} u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\overline{\mathbf{c}}} \overline{x}$$

2.对$(\overline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}})$构造状态观测器：

$$\dot{\hat{\overline{x}}} = (\overline{\mathbf{A}} - \overline{g}\overline{\mathbf{c}})\hat{\overline{x}} + \overline{\mathbf{b}}u + \overline{g}y,$$

得到

$$\overline{\mathbf{A}} - \overline{g}\overline{\mathbf{c}}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_n \\ 1 & & & & -a_{n-1} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & -a_1 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} g_n \\ g_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ g_1 \end{bmatrix}}_{\overline{g}} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & -(a_n + g_n) \\ 1 & & & & -(a_{n-1} + g_{n-1}) \\ & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -(a_1 + g_1) \end{bmatrix}$$

$\bar{\mathbf{A}} - \overline{gc}$

$$
= \begin{bmatrix} 0 & & & & -a_n \\ 1 & & & & -a_{n-1} \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & -a_1 \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} g_n \\ g_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ g_1 \end{bmatrix}}_{\bar{g}} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & \vdots \\ & 1 & -(a_1 + g_1) \end{bmatrix}
$$

$\mathbf{P}(\mathbf{A} - gc)\mathbf{P}^{-1} = \bar{\mathbf{A}}\text{-}\overline{gc}$,

$\bar{g} = \mathbf{P}g, \bar{c} = c\mathbf{P}^{-1}$

若给定了n个希望的极点$s_1, s_2, \cdots, s_n$，则有

$$f(s) = s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1} s + \bar{a}_n$$

可取 $\bar{g} = \begin{bmatrix} \bar{a}_n - a_n \\ \bar{a}_{n-1} - a_{n-1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{a}_1 - a_1 \end{bmatrix}$

3.取$g = \mathbf{P}^{-1}\bar{g}$，

就得到$(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$的观测器方程

$$\dot{\hat{x}} = (\mathbf{A} - g\mathbf{c})\hat{x} + \mathbf{b}u + gy$$

注意到经变换后的系统是可控标准形的对偶形式，于是不难得到变换阵**P**为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & & & 1 & \\ \vdots & & \ddots & & \\ a_1 & 1 & & 0 & \\ 1 & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \vdots \\ \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

例： 给定系统(**A**, **b**, **c**)如下：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1&1&0\end{bmatrix}$$

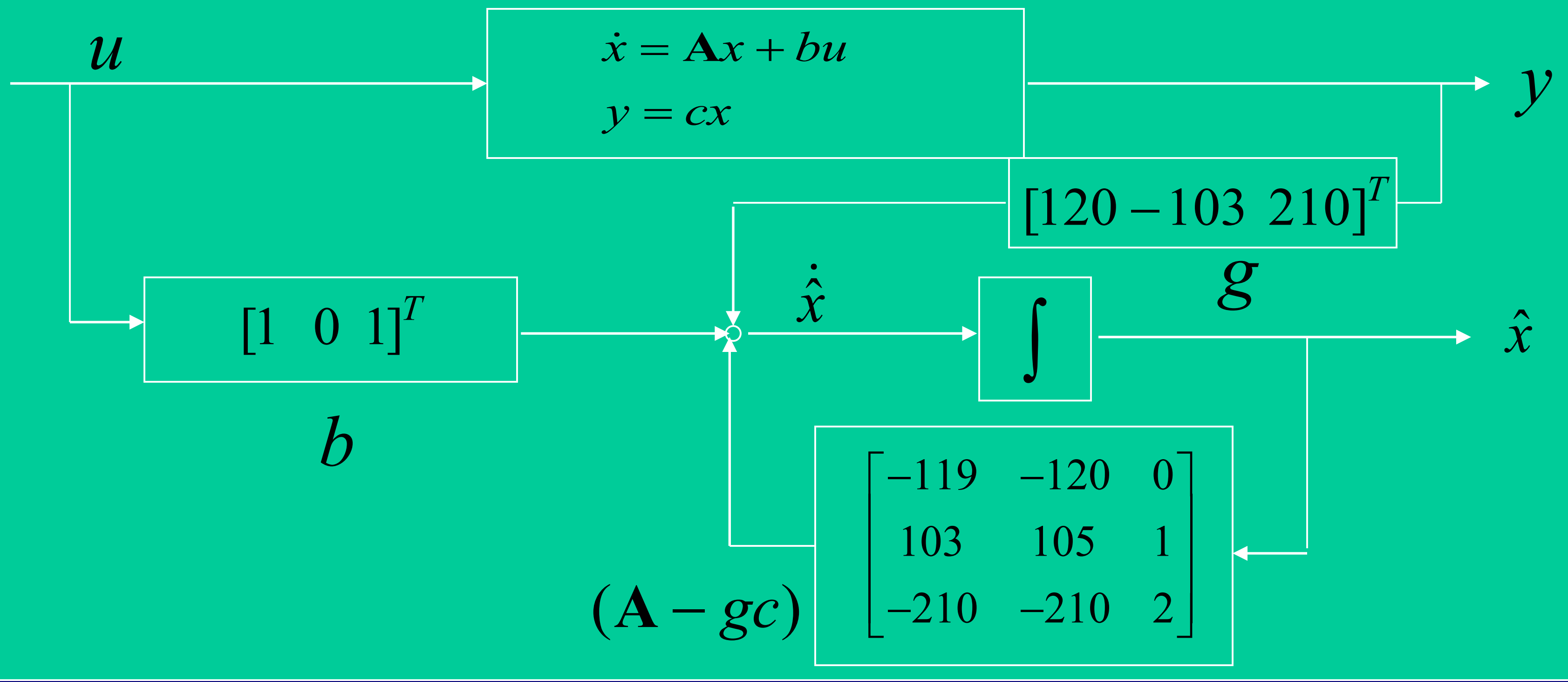
容易验证这个系统是可观测的。现在构造极点在$\{-3,-4,-5\}$的状态观测器：

1. **A**阵的特征多项式为$s^3-5s^2+8s-4=0$;

2. 根据以上介绍的变换阵，有

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}8&-5&1\\-5&1&0\\1&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\1&4&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&-1\\-4&-3&1\\1&1&0\end{bmatrix},\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&-1&0\\1&2&4\end{bmatrix}$$

3. 期望的多项式为$f(s)=s^3+12s^2+47s+60$;

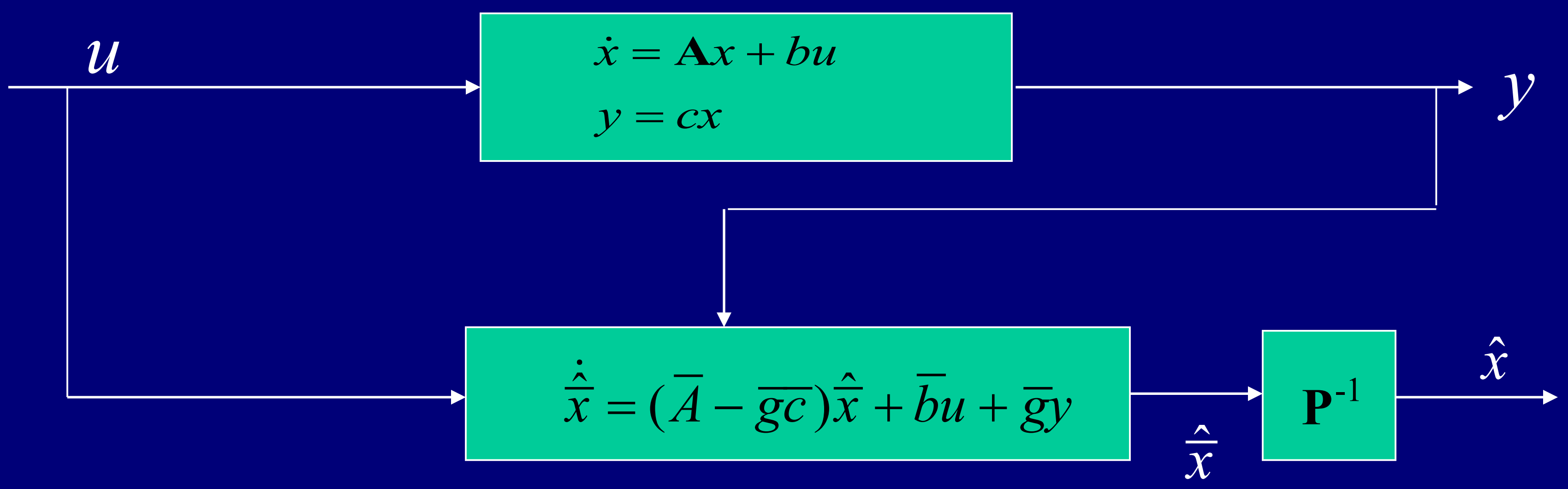


4.$(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$的状态观测器方程为：

$$\dot{\hat{x}} = (\mathbf{A} - gc)\hat{x} + \mathbf{b}u + gy$$

$$= \begin{bmatrix} -119 & -120 & 0 \\ 103 & 105 & 1 \\ -210 & -210 & 2 \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 120 \\ -103 \\ 210 \end{bmatrix} y$$

5'.若在得到$\hat{\bar{x}}$的估计之后，通过$\hat{x}=\mathbf{P}^{-1}\hat{\bar{x}}$得到$\hat{x}$也可以，如下图所示：



$$\hat{\bar{x}}=\mathbf{P}\hat{x} \Rightarrow \hat{x}=\mathbf{P}^{-1}\hat{\bar{x}}$$

四、Kx 观测器的结构条件

线性时不变系统（A，B，C）的观测器也是一个线性时不变系统，其一般形式如下：

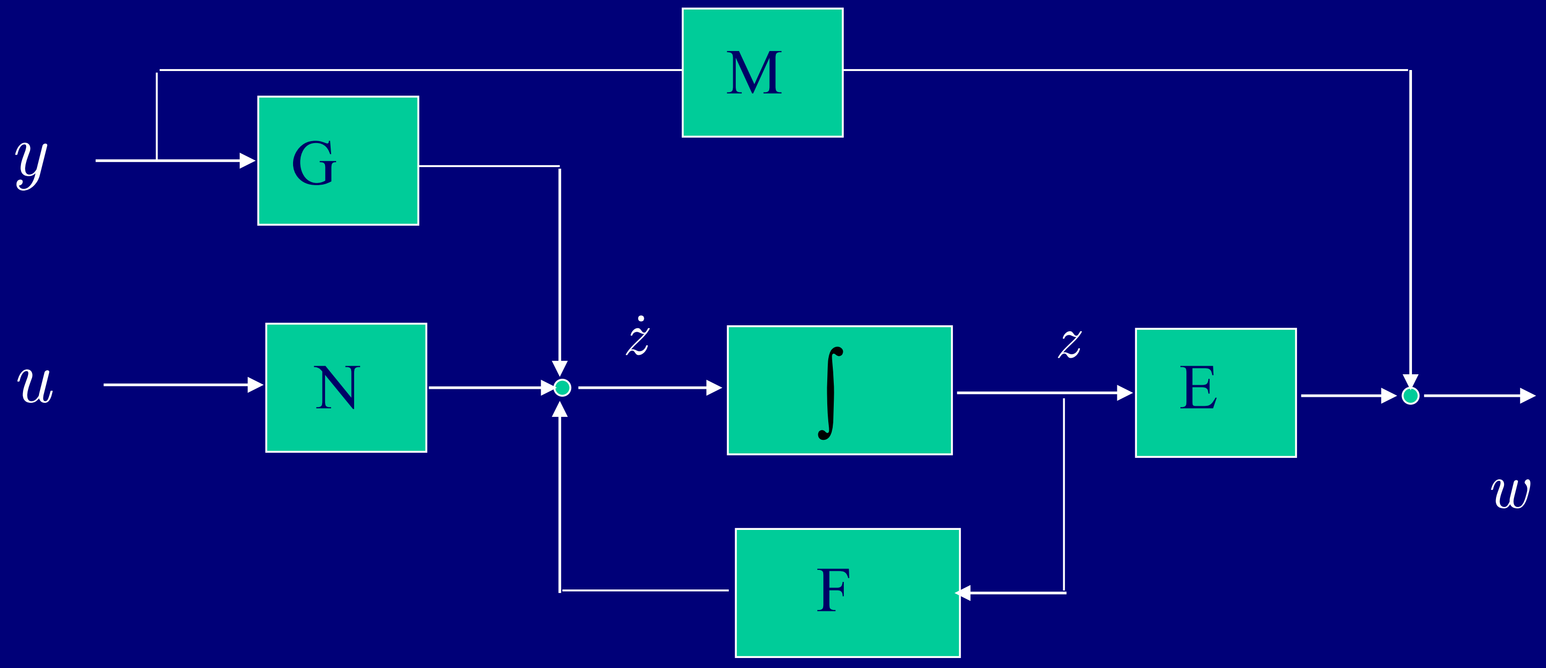
$$\Sigma_0 : \begin{cases} \dot{z} = \mathbf{F}_{r\times r} z + \mathbf{N}_{r\times p} u + \mathbf{G}_{r\times q} y \\ w = \mathbf{E}_{l\times r} z + \mathbf{M}_{l\times q} y \end{cases} \qquad (5-29)$$

问题：上述系统中的矩阵满足什么条件时，系统$\sum_0$才可以构成（A，B，C）的一个Kx 观测器？

即：$t \to \infty$ 时，有

$$\mathbf{K}x - w \to 0$$

若是，w 就给出了Kx 的渐近估计。



$$\Sigma_0 : \begin{cases} \dot{z} = \mathbf{F}z + \mathbf{N}u + \mathbf{G}y \\ w = \mathbf{E}z + \mathbf{M}y \end{cases} \qquad (5-29)$$

注：要特别注意现在讨论的一般 **K**x 观测器与前面讨论的 n 维基本状态观测器、n维基本 **K**x 观测器间的差别。在这里，一般 **K**x 观测器的维数为r。

1. 预备定理

问题： 若 $t \to \infty$ 时，$\mathbf{K}x - w \to 0$，那么，在状态变量z和x之间是否也存在类似的线性渐近关系，即是否存在$\mathbf{P}$，使

$$\lim_{t\to\infty}(\mathbf{P}x - z) = 0, \qquad \forall x_0, z_0, u \qquad (5-30)$$

成立？ 因此，首先研究系统状态变量 x 和观测器的状态变量 z 之间的关系。

定理5-11 若系统（**A, B, C**）可控，那么，若对某个 P阵有关系

$$\lim_{t\to\infty}(\mathbf{P}x - z) = 0, \qquad \forall x_0, z_0, u \qquad （5-30）$$

成立，则下列条件成立：

(1) $\mathbf{R}e \quad \lambda_i(\mathbf{F}) < 0 \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, r)$;

(2) $\mathbf{PA} - \mathbf{FP} = \mathbf{GC}$; $\qquad (5-31)$

(3) $\mathbf{N} = \mathbf{PB}$。

反之，如果（1）成立，且**P** 阵满足（2）、（3），则（5-30）式成立。

证明 充分性。 要证明若(1)成立，P 满足(2)、(3)，则有

(1) $\mathbf{R}e\lambda_i(\mathbf{F})<0$

(2) $\mathbf{PA}-\mathbf{FP}=\mathbf{GC}$

(3) $\mathbf{N}=\mathbf{PB}$

$\dot{z}=\mathbf{F}z$

$+\mathbf{N}u+\mathbf{G}y$

$$\lim_{t\to\infty}(\mathbf{P}x-z)=0,\forall x_0,z_0,u。$$

令

$$e:=\mathbf{P}x-z$$

对e求导数，有

$$\dot{e}=\mathbf{P}\dot{x}-\dot{z}=\mathbf{P}(\mathbf{A}x+\mathbf{B}u)-(\mathbf{F}z+\mathbf{N}u+\mathbf{G}y)$$

$$\overset{(\mathbf{G}y=\mathbf{GC}x)}{=}(\mathbf{PA}-\mathbf{GC})x+(\mathbf{PB}u-\mathbf{N}u)-\mathbf{F}z$$

$$=\underbrace{(\mathbf{PA}-\mathbf{GC})}_{\mathbf{FP}}x-\mathbf{F}z=\mathbf{FP}x-\mathbf{F}z=\mathbf{F}e$$

$$\Rightarrow\dot{e}=\mathbf{F}e$$

则显然对任意的 x_0, z_0, u ,有

$$e(t) = e^{\mathbf{F}t} e(0) = e^{\mathbf{F}t} (\mathbf{P} x_0 - z_0)$$

所以有 $$\lim_{t \to \infty} e(t) = \lim_{t \to \infty} (\mathbf{P} x - z) = 0$$

必要性。设对任意的

$$x_0, z_0, u$$

都有

$$\lim_{t \to \infty} (\mathbf{P} x - z) = 0$$

要证(1)~(3)成立。取u=0 , x_0=0， 则由

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u, \quad y = \mathbf{C}x$$

可知 x=0, 从而， y=0。此时， 由(5-29)：

$$\Sigma_0 : \begin{cases} \dot{z} = \mathbf{F}z + \mathbf{N}u + \mathbf{G}y \\ w = \mathbf{E}z + \mathbf{M}y \end{cases} \qquad (5-29)$$

可得

$$\dot{z} = \mathbf{F}z$$

而且由(5-30)

$$\lim_{t \to \infty} (\mathbf{P}x - z) = 0, \qquad \forall x_0, z_0, u \qquad (5-30)$$

故有：

$$0=\lim_{t\to\infty}(\mathbf{P}x(t)-z(t))=-\lim_{t\to\infty}z(t)$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty}z(t)=0,\forall z_0$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}e\quad \lambda_i(\mathbf{F})<0\quad (i=1,2,\cdots\cdots,r)$$

这就是（1）。

下面证(2)和(3)。因为

$$\begin{aligned}\dot{e}&=\mathbf{P}\dot{x}-\dot{z}=\mathbf{P}(\mathbf{A}x+\mathbf{B}u)-(\mathbf{F}z+\mathbf{N}u+\mathbf{G}y)\\&=\mathbf{F}(\mathbf{P}x-z)+(\mathbf{PA}-\mathbf{FP}-\mathbf{GC})x+(\mathbf{PB}-\mathbf{N})u\\&=\mathbf{F}e+\underbrace{(\mathbf{PA}-\mathbf{FP}-\mathbf{GC})}_{\mathbf{W}}x+\underbrace{(\mathbf{PB}-\mathbf{N})}_{\mathbf{Q}}u\end{aligned}$$

记

$$\mathbf{PA}-\mathbf{FP}-\mathbf{GC}=\mathbf{W}$$

$$\mathbf{PB}-\mathbf{N}=\mathbf{Q},$$

要证**W**、**Q**为零，即(2)、(3)成立。对微分方程取拉氏变换，并解出$e(s)$:

$$se(s)-e(0)=\mathbf{F}e(s)+\mathbf{W}x(s)+\mathbf{Q}u(s)$$

$$e(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}e(0)+(s\mathbf{I}-\mathbf{F})^{-1}[\mathbf{W}x(s)+\mathbf{Q}u(s)]$$

由条件

$$\lim_{t\to\infty}e(t)=0$$

可知

$$\lim_{s\to 0}se(s)=0$$

取x_0=0，有

$$x(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s)$$

又取z_0=0，这时

$$e(0)=\mathbf{P}x(0)-z(0)=\mathbf{P}x_0-z_0=0$$

所以

$$\lim_{s\to 0} se(s) = \lim_{s\to 0}(s\mathbf{I} - \mathbf{F})^{-1}[\mathbf{W}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{Q}]su(s) = 0$$

因为**F**非奇异，故对任意的$u(s)$ 必有下式成立

$$\lim_{s\to 0}[\mathbf{W}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{Q}]su(s) = 0$$

又由于$u(s)$的任意性，故必须有

$$\mathbf{W}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{Q}\equiv 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{W}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\equiv 0，\quad \mathbf{Q}=0$$

否则，可以找到 u，使

$$\lim_{s\to 0}[\mathbf{W}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{Q}]su(s)\neq 0$$

考虑到系统是可控的，在复数域上$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ 行线性无关，立即推得 $\mathbf{W}=0$。注意到

$$\mathbf{W}=\mathbf{PA}-\mathbf{FP}-\mathbf{GC}，\mathbf{Q}=\mathbf{PB}-\mathbf{N}，$$

则$\mathbf{W}=0$、 $\mathbf{Q}=0$ 意味定理中的结论(2)、(3)，从而，定理的全部结论得证。 证完。

在定理5-11中取$r=n$，**P=I**，有

推论5-11 若系统（**A**，**B**，**C**）可控，则（5-29）

$$\Sigma_0:\begin{cases}\dot{z}=\mathbf{F}z+\mathbf{N}u+\mathbf{G}y\\ w=z\end{cases} \tag{A.1}$$

成为（**A**，**B**，**C**）的 n 维状态观测器的充要条件为

(1) $\mathrm{Re}\lambda_i(\mathbf{F})<0 \quad (i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$;

(2) $\mathbf{F}=\mathbf{A}-\mathbf{G}\mathbf{C}$; (A.2)

(3) $\mathbf{N}=\mathbf{B}$。

证明：充分性： 若 **P=I**，(A.2)式成立，则

$$\dot{z} = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})z + \mathbf{B}u + \mathbf{G}y \quad (A.3)$$

又根据定理5-11，

$$\lim_{t\to\infty}(x - z) = 0 \quad \forall x_0, z_0, u$$

这说明 (A.3) 就是一个状态观测器。

必 要 性： 若(A.1)是一个n维状态观测器，根据定义5-1，

$$\lim_{t\to\infty}(x - z) = 0 \quad \forall x_0, z_0, u$$

根据定理5-11，考虑到**P=I**，有

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \mathrm{Re}\lambda_i(\mathbf{F}) < 0 \quad (i = 1, \quad 2, \quad \cdots\cdots, \quad n); \\
&(2) \quad \mathbf{F} = \mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C}; \qquad\qquad\qquad\qquad (A.1) \\
&(3) \quad \mathbf{N} = \mathbf{B}。
\end{aligned}$$

推论5-11表明（**A**，**B**，**C**）的n维状态观测器必具有（5-27）的形式：

$$\dot{\hat{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{G}\mathbf{C})\hat{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{G}y \qquad (5-27)$$

$$w = \mathbf{I}\hat{x}$$

证完。

定理5-11讨论了z和$\mathbf{P}x$之间的关系，没有涉及

$$\Sigma_0:\begin{cases}\dot{z}=\mathbf{F}z+\mathbf{N}u+\mathbf{G}y, & z\in\mathbf{R}^r\\ w=\mathbf{E}z+\mathbf{M}y, & w\in\mathbf{R}^l\end{cases}\qquad(5-29)$$

中的$\mathbf{E}$和$\mathbf{M}$。作为$\mathbf{K}x$观测器，我们进而分析w和$\mathbf{K}x$之间的关系。下面介绍本节的主要结果。

2. 主要结果

定理5-12 若（**A, B**）可控，（**F, E**）可观测，则

$$\Sigma_0:\begin{cases}\dot{z}=\mathbf{F}z+\mathbf{N}u+\mathbf{G}y, & z\in\mathbf{R}^r\\ w=\mathbf{E}z+\mathbf{M}y, & w\in\mathbf{R}^l\end{cases}\qquad(5-29)$$

成为（**A, B, C**）的**K**x 观测器的充要条件为存在$r\times n$ 矩阵**P**，使得下列条件满足

$$\begin{aligned}&(1)\quad \mathrm{Re}\,\lambda_i(\mathbf{F})<0 \qquad (i=1,2,\cdots,r)\\&(2)\quad \mathbf{PA}-\mathbf{FP}=\mathbf{GC}\\&(3)\quad \mathbf{N}=\mathbf{PB}\\&(4)\quad \mathbf{K}=\mathbf{EP}+\mathbf{MC}\end{aligned}\qquad(5\text{-}32)$$

证明：充分性：回忆关于**K***x*观测器的定义5-1，当定理中(1), (2), (3)满足时，由定理5-11知，(5-29)有

$$\lim_{t\to\infty}(\mathbf{P}x - z) = 0 \qquad \forall x_0, z_0, u$$

成立，若此时 **K** 满足定理中(4)：

$$\mathbf{K=EP+MC}$$

则

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty}(\mathbf{K}x - w) &= \lim_{t\to\infty}[(\mathbf{EP+MC})x - (\mathbf{E}z + \mathbf{M}y)] \\ &= \lim_{t\to\infty}\mathbf{E}(\mathbf{P}x - z) \to 0 \quad \forall x_0, z_0, u\end{aligned}$$

这说明此时(5-29)就是一个**K***x*观测器。

必要性证明的说明： 要证：若

$$\Sigma_0:\begin{cases}\dot{z}=\mathbf{F}_{r\times r}z+\mathbf{N}_{r\times p}u+\mathbf{G}_{r\times q}y\\ w=\mathbf{E}_{l\times r}z+\mathbf{M}_{l\times q}y\end{cases}\qquad(5-29)$$

是一个**K***x*观测器：

$$\lim_{t\to\infty}(\mathbf{K}x-w)\to 0\quad\forall x_0,z_0,u\qquad(\text{B}.1)$$

则存在$r\times n$ 矩阵P，满足(1)~(4)。

证明步骤如下：

1）证明由(B.1)式成立可以推出：存在**P**，使得

$$\lim_{t\to\infty}(\mathbf{P}x-z)\to 0\quad\forall x_0,z_0,u$$

于是，定理(1)~(3)成立(定理5-11）；

2）因为

$$\lim_{t\to\infty}(\mathbf{K}x-w)=\lim_{t\to\infty}(\mathbf{K}x-(\mathbf{E}z+\mathbf{M}y))$$
$$=\lim_{t\to\infty}(\mathbf{K}x-\mathbf{EP}x-\mathbf{MC}x)$$
$$=\lim_{t\to\infty}[\mathbf{K}-(\mathbf{EP}+\mathbf{MC})]x$$
$$=[\mathbf{K}-(\mathbf{EP}+\mathbf{MC})]\lim_{t\to\infty}x=0,\forall x_0,z_0,u$$

由于（**A, B**）可控，x 可在任意时刻取任意值，取适当的x_0和u，总可以使$\lim_{t\to\infty}x\neq 0$，故有(4)。

注：必要性证明类似于定理5-11的必要性证明，参见何关 钰《线性控制系统理论》*p*.494。在必要性证明中用到了“（**A, B**）可控，（**F, E**）可观测”的假设。

可以将定理5-11和定理5-12结合在一起考虑：

推论5-12 若（**A**，**B**）可控，（**F**，**E**）可观测，则（5-29）式所表示的系统成为（**A**，**B**，**C**）的一个$\mathbf{K}x$观测器的充要条件为存在某**P**矩阵，满足

(1) 对任意x_0, z_0, u, 有 $\lim_{t\to\infty}(\mathrm{P}x-z)=0$

(2) **K=EP+MC**。

证明：这只要注意到(1)满足，则根据定理5-11，定理5-12中的前三条就一定满足。

此外，需要注意预备定理5-11与定理5-12在条件上是不一样的，后者还要求（**F**，**E**）可观测。

3. 矩阵P的存在性条件

进而讨论在什么条件下P阵（参见定理5-12之条件2）才存在。我们有：

定理5-13 设A、F和GC分别是$n\times n$, $r\times r$, $r\times n$ 矩阵，则方程

$$\mathbf{P}_{r\times n}\mathbf{A}-\mathbf{F}_{r\times r}\mathbf{P}=\mathbf{G}_{r\times q}\mathbf{C}_{q\times n} \qquad (5-33)$$

有$r\times n$ 阵P唯一存在的充要条件为F与A无相同的特征值。

证明： 这是一个典型的矩阵方程（参见矩阵论）：

$$\mathbf{AX}+\mathbf{XB}=\mathbf{C},\ \mathbf{C}\in\mathbf{R}^{m\times n}$$

的求解问题，其基本思想是把矩阵方程的求解变成一个线性方程的求解。令

$\mathbf{A}=(a_{ij})\in\mathbf{R}^{n\times n},\mathbf{F}=(f_{ij})\in\mathbf{R}^{r\times r},\mathbf{W}:=\mathbf{GC}=(w_{ij})\in\mathbf{R}^{r\times n}$

$\mathbf{P}=(p_{ij})\in\mathbf{R}^{r\times n}$

定义两个矩阵的*Kronecker*乘积(直积）如下：

$$\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}=\begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \cdots & a_{12}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \cdots & a_{2n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\mathbf{B} & a_{n2}\mathbf{B} & \cdots & a_{nn}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

容易验证，*Kroneker*乘积满足如下关系：

1）．$(\mathbf{A}_1\otimes\mathbf{B}_1)(\mathbf{A}_2\otimes\mathbf{B}_2)=(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2)\otimes(\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)$ ；

2）．$(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T\otimes\mathbf{B}^T$；

3). $\alpha(\mathbf{A}\otimes\mathbf{B})=(\alpha\mathbf{A})\otimes\mathbf{B}=\mathbf{A}\otimes(\alpha\mathbf{B})$；

利用矩阵的Kronecker乘积定义一个拉长映射。

$$X=\begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_m^T \end{bmatrix} \in R^{m\times n}, x_i \in R^n, \sigma : R^{m\times n} \to R^{nm} \text{ 定义为 } \sigma(X)=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

引理: $A \in R^{m\times n}, X \in R^{n\times k}, B \in R^{k\times l}$, 则 $\sigma(AXB)=(A\otimes B^T)\sigma(X)$.

则不难验证，方程 **PA－FP=GC =W**可以写成

$$(\mathbf{I}_r \otimes \mathbf{A}^T - \mathbf{F}\otimes \mathbf{I}_n)\overline{p}=\overline{w}$$

其中 $\overline{p}=\sigma(P), \overline{w}=\sigma(W)$

方程有唯一解的充要条件是$\det(\mathbf{I}_r \otimes \mathbf{A}^T - \mathbf{F}\otimes \mathbf{I}_n) \neq 0$,

因此，只要证明$(\mathbf{I}_r \otimes \mathbf{A}^T - \mathbf{F}\otimes \mathbf{I}_n)$的特征值非零就可以了。

为此，令$\mathbf{F}x_j=\lambda_j x_j, j=1,\cdots,r;\quad \mathbf{A}^T y_i=\mu_i y_i, i=1,\cdots,n$

$(\mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{B}_1)(\mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{B}_2)$
$= (\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2) \otimes (\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2)$

$\alpha(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) =$
$(\alpha\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} =$
$\mathbf{A} \otimes (\alpha\mathbf{B})$

现在，考虑:$(\mathbf{I}_r \otimes \mathbf{A}^T - \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n)(x_j \otimes y_i)$

$\because (\mathbf{I}_r \otimes \mathbf{A}^T - \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n)(x_j \otimes y_i) =$

$= (\mathbf{I}_r \otimes \mathbf{A}^T)(x_j \otimes y_i) - (\mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n)(x_j \otimes y_i)$

$= (\mathbf{I}_r x_j \otimes \mathbf{A}^T y_i) - (\mathbf{F} x_j \otimes \mathbf{I}_n y_i)$

$= x_j \otimes (\mu_i y_i) - (\lambda_j x_j \otimes y_i) = \mu_i (x_j \otimes y_i) - \lambda_j (x_j \otimes y_i)$

$= (\mu_i - \lambda_j)(x_j \otimes y_i), \quad i = 1, \cdots, n; \; j = 1, \cdots, r,$

这说明$\mu_i - \lambda_j$是矩阵$(\mathbf{I}_r \otimes \mathbf{A}^T - \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n)_{nr \times nr}$的特征值。

故$\mu_i - \lambda_j \neq 0 \, \forall i, j \Leftrightarrow$ $\mathbf{F}$与$\mathbf{A}$无相同的特征值 $\Leftrightarrow$

$(\mathbf{I}_r \otimes \mathbf{A}^T - \mathbf{F} \otimes \mathbf{I}_n)$非奇异。证完。

注：定理5-13： 设**A**、**F**和**GC**分别是$n\times n$, $r\times r$, $r\times n$ 矩阵，则方程

$$\mathbf{P}_{r\times n}\mathbf{A}-\mathbf{F}_{r\times r}\mathbf{P}=\mathbf{G}_{r\times q}\mathbf{C}_{q\times n} \qquad (5-33)$$

有$r\times n$ 阵**P**唯一存在的充要条件为**F**与**A**无相同的特征值。

若在定理中令r=n，**F**= –**A**$^{\mathrm{T}}$，**GC**= –**Q**，**Q**为正定阵，就得到著名的 *Lyapunov* 方程：

$$\mathbf{P}_{n\times n}\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}=-\mathbf{Q}$$

在(5-33)式中，若A的所有特征值均具负实部，则**F**= –**A**$^{\mathrm{T}}$ 的所有特征值均具正实部，此时，对任意的**Q** >**0**，**P** 存在且唯一。

4. 求Kx 观 测 器 的 一 般 步 骤： Kx观测器的参数：

1) 确定一个**F**阵，它的特征值在复平面左半部且与**A**的特征值不同；

2) 选取**G**阵，由**PA－FP=GC**解出P (利用定理5-13）；

3) 由**PB=N**定出**N**；

4) 求解矩阵方程 **K=EP+MC**，得到 **E**，**M**（**K**给定）；

5) 验证（**F, E**）是否可观测。

例题 系统方程为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

取 $\mathbf{K}=[\,0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\,]$时，令 $r=1$，试设计一个一维$\mathbf{K}x$观测器。

解： 由于$\mathbf{K}$为行向量， $\mathbf{K}x$为标量，故由

$$\lim_{t\to\infty}(\mathbf{K}x-w)\to 0 \quad \forall x_0, z_0, u \qquad \text{(B.1)}$$

$$\Sigma_0:\begin{cases}\dot{z}=\mathbf{F}_{r\times r}z+\mathbf{N}_{r\times p}u+\mathbf{G}_{r\times q}y\\ w=\mathbf{E}_{l\times r}z+\mathbf{M}_{l\times q}y\end{cases}\qquad(5-29)$$

知此时$r=l=1$。按以上设计步骤：

1）取**F**= –3，**A** 的四个根是： –0.31±0.32j

–2.19±0.55j

2) 取**G**=[–2, –5]，解方程

PA－FP=GC

得 **P**=[–1, 1, –3, 1];

3) 由**PB=N**定出**N**：**N=1**;

4)求解矩阵方程 **K=EP+MC**，得到

$$\mathbf{E}=1$$

$$\mathbf{M}=[1 \quad 3]$$

最后得到所要的一维**K**x观测器为

$$\begin{cases}\mathbf{F}=-3\\ \mathbf{N}=1\\ \mathbf{G}=[-2 \quad -5]\\ \mathbf{E}=1\\ \mathbf{M}=[1 \quad 3]\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot{z}=-3z+u-[2 \quad 5]y\\ w=z+[1 \quad 3]y\end{cases}$$

注： 由于引入观测器的目的，是用于构成反馈，自然希望观测器的维数越低越好。

一般说来，在以上步骤中，随着**F**、**G**的不同选取，会得到不同的**P**，因而对一个系统可构造出不止一个**K**x观测器。

同一系统的不同Kx观测器间的关系怎样呢?

五、基本观测器的代数等价性问题

1. Kx观测器的代数等价性问题

若系统

$$\dot{z} = \mathbf{F}_1 z + \mathbf{N}_1 u + \mathbf{G}_1 y$$
$$w = \mathbf{E}_1 z + \mathbf{M}_1 y \qquad (5-35)$$

是（**A, B, C**）的一个**K**x观测器。作变换 $\bar{z} = \mathbf{T}z$，有

$$\dot{\bar{z}} = \mathbf{F}_2 \bar{z} + \mathbf{N}_2 u + \mathbf{G}_2 y$$
$$w = \mathbf{E}_2 \bar{z} + \mathbf{M}_2 y \qquad (5-36)$$

其中，

$$\mathbf{F}_2 = \mathbf{T}\mathbf{F}_1\mathbf{T}^{-1}$$
$$\mathbf{N}_2 = \mathbf{T}\mathbf{N}_1$$
$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{T}\mathbf{G}_1$$
$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_1\mathbf{T}^{-1}$$
$$\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_1$$

称（5-36）为(5-35)的**代数等价系统**。

定理5-14　若（**A**，**B**，**C**）可控，（5-35）式是它的一个 **K**x 观测器，则其代数等价系统（5-36）也是它的一个 **K**x 观测器。

证明： 只要证明存在$r\times n$ 矩阵 $\mathbf{P}_2$, 使(5-36)

$$\dot{\bar{z}} = \mathbf{F}_2\bar{z} + \mathbf{N}_2 u + \mathbf{G}_2 y$$

$$w = \mathbf{E}_2\bar{z} + \mathbf{M}_2 y \qquad (5-36)$$

满足：

(1) $\mathrm{Re}\,\lambda_i(\mathbf{F}_2) < 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$

(2) $\mathbf{P}_2\mathbf{A} - \mathbf{F}_2\mathbf{P}_2 = \mathbf{G}_2\mathbf{C}$

(3) $\mathbf{N}_2 = \mathbf{P}_2\mathbf{B}$

(4) $\mathbf{K} = \mathbf{E}_2\mathbf{P}_2 + \mathbf{M}_2\mathbf{C}$,

则根据定理5-12，此时(5-36)就是一个**K**x观测器。

注意到($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{N}_1$, $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{E}_1$)是一个$\mathbf{K}x$ 观测器， 故

$$(1)\quad \mathrm{Re}\,\lambda_i(\mathbf{F}_1) < 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

$$(2)\quad \mathbf{P}_1\mathbf{A} - \mathbf{F}_1\mathbf{P}_1 = \mathbf{G}_1\mathbf{C}$$

$$(3)\quad \mathbf{N}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{B}$$

$$(4)\quad \mathbf{K} = \mathbf{E}_1\mathbf{P}_1 + \mathbf{M}_1\mathbf{C},$$

因此

$$(1)\quad \mathbf{F}_2 = \mathbf{T}\mathbf{F}_1\mathbf{T}^{-1} \Rightarrow \mathrm{Re}\,\lambda_i(\mathbf{F}_2) < 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, r);$$

$$\mathbf{F}_2=\mathbf{T}\mathbf{F}_1\mathbf{T}^{-1}$$
$$\mathbf{N}_2=\mathbf{T}\mathbf{N}_1$$
$$\mathbf{G}_2=\mathbf{T}\mathbf{G}_1$$
$$\mathbf{E}_2=\mathbf{E}_1\mathbf{T}^{-1}$$
$$\mathbf{M}_2=\mathbf{M}_1$$

(2) 由$\bar{z}=\mathbf{T}z$启发，取$\mathbf{P}_2=:\ \mathbf{T}\mathbf{P}_1$，有

$$\mathbf{P}_2\mathbf{A}-\mathbf{F}_2\mathbf{P}_2=\mathbf{T}\mathbf{P}_1\mathbf{A}-\mathbf{F}_2\mathbf{T}\mathbf{P}_1=\mathbf{T}\mathbf{P}_1\mathbf{A}-\underbrace{\mathbf{T}\mathbf{F}_1\mathbf{T}^{-1}}_{\mathbf{F}_2}\mathbf{T}\mathbf{P}_1$$

$$=\mathbf{T}(\mathbf{P}_1\mathbf{A}-\mathbf{F}_1\mathbf{P}_1)=\mathbf{T}(\mathbf{G}_1\mathbf{C})=\mathbf{G}_2\mathbf{C}$$

$$\Rightarrow \mathbf{P}_2\mathbf{A}-\mathbf{F}_2\mathbf{P}_2=\mathbf{G}_2\mathbf{C};$$

(3) $\mathbf{N}_2=\mathbf{T}\mathbf{N}_1=\mathbf{T}\mathbf{P}_1\mathbf{B}$　由（2）：$\mathbf{P}_2=\mathbf{T}\mathbf{P}_1,\Rightarrow \mathbf{N}_2=\mathbf{P}_2\mathbf{B};$

(4) $\mathbf{K}=\mathbf{E}_1\mathbf{P}_1+\mathbf{M}_1\mathbf{C}=\mathbf{E}_1\mathbf{T}^{-1}\mathbf{P}_2+\mathbf{M}_1\mathbf{C}=\mathbf{E}_2\mathbf{P}_2+\mathbf{M}_2\mathbf{C}$。　证完。

2.n 维状态观测器的代数等价问题

回忆（**A, B, C**）的 n 维基本状态观测器

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (\mathbf{A}-\mathbf{GC})\hat{x}+\mathbf{B}u+\mathbf{G}y \qquad (5-37)\\ w &= \mathbf{I}\hat{x}\end{aligned}$$

和 n 维基本Kx 观测器

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}} &= (\mathbf{A}-\mathbf{GC})\hat{x}+\mathbf{B}u+\mathbf{G}y \qquad (5-38)\\ w &= \mathbf{K}\hat{x}\end{aligned}$$

试将(5-37)、(5-38)与（5-29）相比较：

$$\Sigma_0:\begin{cases}\dot{z}=\mathbf{F}_{r\times r}z+\mathbf{N}_{r\times p}u+\mathbf{G}_{r\times q}y\\ w=\mathbf{E}_{l\times r}z+\mathbf{M}_{l\times q}y\end{cases} \qquad (5-29)$$

(5-29)是观测器的一般形式，其中的 **M**y 一项通常仅在维数 $r<n$ 时才使用，当 $r=n$ 时可以取**M=0**。因此，对n 维观测器而言，可取其一般形式如下：

$$\dot{z} = \mathbf{F}z + \mathbf{N}u + \mathbf{G}y, \quad z \in \mathbf{R}^n$$

$$w = \mathbf{E}z, w \in \mathbf{R}^n \qquad (5-39)$$

以下定理表明：n 维状态观测器(5-39) 必和一个 n 维基本状态观测器代数等价。

定理5-15 若（**A**，**B**，**C**）可控可观测，则（5-39）是其n 维状态观测器的充要条件是它与某个 n 维基本状态观测器代数等价。

证明： 充分性由定理5-14（代数等价问题）给出。

必要性： 若(F,N,G,E)是一个 n 维状态观测器：

$$\dot{z} = \mathbf{F}z + \mathbf{N}u + \mathbf{G}y, \quad z \in \mathbf{R}^n$$

$$w = \mathbf{E}z, w \in \mathbf{R}^n \qquad (5-39)$$

只要证明它和n 维基本状态观测器：

$$\dot{\hat{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{HC})\hat{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{H}y \qquad (5-37)$$

$$\hat{x} = \mathbf{I}\hat{x}$$

代数等价即可，即存在非奇异矩阵P，使

$$\mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{HC})\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{PB} = \mathbf{N}, \qquad \mathbf{PH} = \mathbf{G}$$

由定理5-12可知，若(**F**,**N**,**G**,**E**)是一个 n 维状态观测器，则必有$n\times n$ 的矩阵 **F** 和 **P**，使得

$$(1)\quad \mathrm{Re}\,\lambda_i(\mathbf{F})<0 \qquad (i=1,2,\cdots,n);$$

$$(2)\quad \mathbf{PA}-\mathbf{FP}=\mathbf{GC}$$

$$(3)\quad \mathbf{N}=\mathbf{PB};$$

$$(4)\quad \mathbf{I}=\mathbf{EP} \quad (\because \mathbf{K}=\mathbf{EP}+\mathbf{MC},\ \mathbf{K}=\mathbf{I},\ \mathbf{M}=0)$$

由此可知 $\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{E}$ 存在且非奇异。 令$\hat{x}=\mathbf{P}^{-1}z$，有

$$\begin{cases}\dot{\hat{x}}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{FP}\hat{x}+\mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}u+\mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}y\\ w=\mathbf{E}z=\mathbf{EPP}^{-1}z=\mathbf{EP}\hat{x}=\hat{x} \quad ,\mathbf{EP}=\mathbf{I}\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{P}\hat{x} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}u + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}y \\ w = \mathbf{E}z = \mathbf{E}\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}z = \mathbf{E}\mathbf{P}\hat{x} = \hat{x} \end{cases} \quad ,\mathbf{EP=I}$$

由条件(2)，有

$\mathbf{PA - GC = FP} \Rightarrow \mathbf{P(A - P^{-1}GC)\, P^{-1} = F}$,

故只要令 $\mathbf{H{:}=P^{-1}G}$， $\Rightarrow \mathbf{P^{-1}\,FP=A\text{-}HC}$

并注意到 $\mathbf{P^{-1}N = B}$

则
$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{P}\hat{x} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{N}u + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{G}y = (\mathbf{A} - \mathbf{HC})\hat{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{H}y \\ w = \mathbf{E}z = \mathbf{E}\mathbf{P}^{-1}\hat{x} = \hat{x} \end{cases}$$

这就证明了(5-39)等价于一个 n 维状基本态观测器。

证完。

3. n维 Kx 观测器的代数等价问题

进一步的问题是： n 维 Kx 观测器之间是否也有类似的关系，即 n 维 Kx 观测器是否必定和n维基本Kx 观测器代数等价呢？答案是：**这个结论仅对单输入单输出系统成立**。

在此仅给出单输入、单输出系统的结果：

定理5-16 若（**A**，**b**，**c**）可控可观测，则如下系统

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \mathbf{F}z + nu + gy, \quad z \in \mathbf{R}^n \\ w &= \mathbf{E}z \end{aligned} \tag{5-40}$$

为（**A**，**b**，**c**）的n维Kx观测器的充要条件是(5-40)与（**A**，**b**，**c**）的某个n维基本Kx观测器代数等价，其中，（**F**, **E**)可观、(**F**, $\boldsymbol{g}$)可控 。

关于状态观测器和 $\mathrm{K}x$ 观测器小结

$\mathrm{K}x$ 观测器结构：

$$\Sigma_0 : \begin{cases} \dot{z} = \mathbf{F}z + \mathbf{N}u + \mathbf{G}y \\ w = \mathbf{E}z + \mathbf{M}y \end{cases} \qquad (5-29)$$

定理5-12表明，在（**A**，**B**）可控，（**F**，**E**）可观的条件下，(5-29)能够成为 **K**x 观测器的充要条件是存在 $r\times n$ 阵 **P** 使得如下条件满足：

$$(1)\quad \mathrm{Re}\lambda_i(\mathbf{F}) < 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, r)$$

$$(2)\quad \mathbf{PA} - \mathbf{FP} = \mathbf{GC}$$

$$(3)\quad \mathbf{N} = \mathbf{PB}$$

$$(4)\quad \mathbf{K} = \mathbf{EP} + \mathbf{MC}$$

特别，**K**阵须满足条件(4)，否则不能称为**K**x观测器；特别，若**K=I**，则**K**x观测器退化成状态观测器；一般**K**x观测器其状态的维数$r \le n$；而 n 维基本 **K**x 观测器中，状态变量是 n 维.

等价性问题

1. 定理5-14表明：若Σ02：$(\mathbf{F}_2,\mathbf{N}_2,\mathbf{G}_2,\mathbf{E}_2,\mathbf{M}_2)$与 Σ01：$(\mathbf{F}_1,\mathbf{N}_1,\mathbf{G}_1,\mathbf{E}_1,\mathbf{M}_1)$ 代数等价且Σ01是$\mathbf{K}x$ 观测器，则Σ02也是。

2. 定理5-15 给出了 n 维状态观测器和 n 维基本状态观测器的代数等价关系。

3. 当观测器状态变量z 的维数小于 n 时，仍可由定理5-12构成状态观测器。此时的观测器应具有定理5-12给出的一般形式。

4. 定理5-16则进一步表明，对单输入单输出系统，n 维$\mathbf{K}x$ 观测器和 n 维基本 $\mathbf{K}x$ 观测器也是代数等价的；但对多输入多输出系统，结论不成立。