降维观测器和动态补偿

六、降维状态观测器

前面学习了Kx观测器的一般形式：

$$\Sigma_0:\begin{cases}\dot{z}=\mathbf{F}_{r\times r}z+\mathbf{N}_{r\times p}u+\mathbf{G}_{r\times q}y\\ w=\mathbf{E}_{l\times r}z+\mathbf{M}_{l\times q}y\end{cases}\qquad(5-29)$$

根据定理(5-12)，存在$r\times n$ 矩阵**P** ,使得

$$(1)\quad \mathrm{Re}\lambda_i(\mathbf{F})<0\qquad (i=1,2,\cdots,n);$$

$$(2)\quad \mathbf{PA}-\mathbf{FP}=\mathbf{GC}$$

$$(3)\quad \mathbf{N}=\mathbf{PB};$$

$$\mathbf{(4)}\quad \mathbf{K}=\mathbf{EP}+\mathbf{MC}$$

根据定义5-1，**K=I** 时称（5-29）为 r 维状态观测器。

1.状态观测器的维数

问题： 状态观测器的维数 r 是否可以降低？可能的最小值是多少？因为维数的降低，意味着观测器可具有较为简单的形式，从而使工程实现更加方便。因此研究降维状态观测器以及最小维状态观测器的设计问题就成为观测器理论的重要课题之一。

考虑 n 维线性时不变动态方程

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}x$$

若假定$rank\mathbf{C}=q$，那么输出y实际上已经给出了部分状态变量的估计。显然，为了估计全部状态，只须用一个低阶的观测器估计出其余的状态变量就可以了，也就是说，状态观测器的维数显然可比n低。

定理5-17 若系统（**A, B, C**）可控可观测，且

$$rank\mathbf{C}=q$$

则系统的**状态观测器**的最低维数是

$$n-q$$

证明 根据观测器的结构条件（参见定义5-1和定理5-12），对于状态观测器要求

$$\mathbf{K}=\mathbf{EP}+\mathbf{MC}=[\mathbf{E}\quad \mathbf{M}]\begin{bmatrix}\mathbf{P}\\ \mathbf{C}\end{bmatrix}=\mathbf{I}_n$$

其中**P**是$r\times n$阵，且满足**PA－FP=GC**。要使上式有解，应有

$$rank\begin{bmatrix}\mathbf{P}\\ \mathbf{C}\end{bmatrix}\geq n$$

而已知

$$rank\mathbf{C}=q$$

所以

$$rank\mathbf{P}\geq n-q$$

故**P**的最低维数

$$r_{\min}=n-q$$

证完。

2. 最小维数状态观测器的构造

不妨假定$\mathbf{C}=[\mathbf{C}_1\ \mathbf{C}_2]$，这里$\mathbf{C}_1$,$\mathbf{C}_2$分别是$q\times q$和$q\times(n-q)$矩阵，而且$rank\mathbf{C}_1=q$。

分以下几个步骤来具体建立最小维数的状态观测器。

1）取等价变换$\overline{x}=\mathbf{T}x$，变换矩阵 $\mathbf{T}$ 定义为

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\\ 0 & \mathbf{I}_{n-q}\end{bmatrix}\Rightarrow \mathbf{T}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1^{-1} & -\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\\ 0 & \mathbf{I}_{n-q}\end{bmatrix}$$

显然T是满秩的。这时系统可化为

$$\begin{bmatrix}\dot{\overline{x}}_1\\ \dot{\overline{x}}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{A}}_{11} & \overline{\mathbf{A}}_{12}\\ \overline{\mathbf{A}}_{21} & \overline{\mathbf{A}}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{x}_1\\ \overline{x}_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{B}}_1\\ \overline{\mathbf{B}}_2\end{bmatrix}u \qquad (5-43)$$

$$y=\mathbf{C}x=\mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{T}x=\mathbf{C}\mathbf{T}^{-1}\overline{x}=[\mathbf{I}_q \quad 0]\overline{x}=\overline{x}_1$$

特点：经变换后，有 $y=\bar{x}_1$，显然输出 y 直接给出了 $\bar{x}_1$，状态估计的问题就化为只需对 $n-q$ 维向量 $\bar{x}_2$ 进行估计就可达到状态重构的 目的。

2）导出关于 $\bar{x}_2$ 的状态方程和输出方程，为进一步构造状态观测器作准备。为此，将(5-43)重新写成：

$$\dot{\bar{x}}_2=\bar{\mathbf{A}}_{22}\bar{x}_2+\bar{\mathbf{A}}_{21}y+\bar{\mathbf{B}}_2u$$

$$\dot{y}=\bar{\mathbf{A}}_{11}y+\bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{x}_2+\bar{\mathbf{B}}_1u$$

记

$$\bar{y}:=\dot{y}-\bar{\mathbf{A}}_{11}y-\bar{\mathbf{B}}_1u$$

则

$$\overline{y} = \overline{\mathbf{A}}_{12}\overline{x}_2$$

于是我们得到

$$\begin{aligned} \dot{\overline{x}}_2 &= \overline{\mathbf{A}}_{22}\overline{x}_2 + (\overline{\mathbf{A}}_{21}y + \overline{\mathbf{B}}_2 u) \\ \overline{y} &= \overline{\mathbf{A}}_{12}\overline{x}_2 \end{aligned} \qquad (5\text{-}44)$$

或者进一步写成 如下$n{-}q$ 维系统：

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}_2 = \overline{\mathbf{A}}_{22}\overline{x}_2 + [\overline{\mathbf{A}}_{21} \quad \overline{\mathbf{B}}_2]\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \\ \overline{y} = \overline{\mathbf{A}}_{12}\overline{x}_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}\tilde{u} \\ y = \mathbf{C}x \end{cases}}$$

因此，我们只要构造上述系统的观测器就可以了。

立即会产生的问题是：

$$(\bar{\mathbf{A}}_{22},\bar{\mathbf{A}}_{12})$$

是否可观测？如果可观测，则上述系统全维观测器存在并可任意配置极点。

引理 若（**A**，**C**）可观测，则 $(\bar{\mathbf{A}}_{22}, \bar{\mathbf{A}}_{12})$ 也可观测。

证明： 考虑下列PBH检验矩阵：

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}\text{-}s\mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} - s\mathbf{I} & \overbrace{\bar{\mathbf{A}}_{12}}^{n-q\text{列}} \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} - s\mathbf{I} \\ \mathbf{I}_q & 0 \end{bmatrix}$$

对任意的s，它列满秩的充要条件是后$n\text{–}q$列也满秩。但

$$rank\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{22} - s\mathbf{I} \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ \bar{\mathbf{A}}_{22} - s\mathbf{I} \end{bmatrix} = rank\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{22} - s\mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{A}}_{12} \end{bmatrix}$$

即 $(\bar{\mathbf{A}}_{22}, \bar{\mathbf{A}}_{12})$ 可观测。**证完。**

3）建立$n-q$维系统的全维（$n-q$）状态观测器

$$\begin{cases}\dot{\bar{x}}_2=\bar{\mathbf{A}}_{22}\bar{x}_2+[\bar{\mathbf{A}}_{21}\quad\bar{\mathbf{B}}_2]\begin{bmatrix}y\\u\end{bmatrix}\\ \bar{y}=\bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{x}_2\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{cases}\dot{x}=\mathbf{A}x+\mathbf{B}\tilde{u}\\ y=\mathbf{C}x\end{cases}}$$

根据全维状态观测器的一般方程，可立即写出它的观测器方程为：

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_2=(\bar{\mathbf{A}}_{22}-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})\hat{\bar{x}}_2+\overbrace{\left[\bar{\mathbf{A}}_{21}\quad\bar{\mathbf{B}}_2\right]\begin{bmatrix}y\\u\end{bmatrix}}^{\mathbf{B}\tilde{u}}+\mathbf{G}_2\bar{y}$$

将 $\bar{y}=\dot{y}-\bar{\mathbf{A}}_{11}y-\bar{\mathbf{B}}_1u$ 代入上式，得到

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_2 = (\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})\hat{\bar{x}}_2 + \bar{\mathbf{A}}_{21}y + \bar{\mathbf{B}}_2 u + \mathbf{G}_2 \underbrace{(\dot{y} - \bar{\mathbf{A}}_{11}y - \bar{\mathbf{B}}_1 u)}_{\bar{\mathbf{A}}_{12}\bar{x}_2(\bar{x}_2\text{被估量，得不到})}$$

或：

$$\dot{\hat{\bar{x}}}_2 - \mathbf{G}_2\dot{y} = (\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})\hat{\bar{x}}_2 + \bar{\mathbf{A}}_{21}y + \bar{\mathbf{B}}_2 u + \mathbf{G}_2(-\bar{\mathbf{A}}_{11}y - \bar{\mathbf{B}}_1 u)$$

记

$$z = \hat{\bar{x}}_2 - \mathbf{G}_2 y$$

得到

$$\dot{z} = (\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})z + (\bar{\mathbf{B}}_2 - \mathbf{G}_2\bar{\mathbf{B}}_1)u + [(\bar{\mathbf{A}}_{21} - \mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{11}) + (\bar{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})\mathbf{G}_2]y \quad (5-45)$$

$$\overline{y} := \dot{y} - \overline{\mathbf{A}}_{11} y - \overline{\mathbf{B}}_1 u$$

令

$$\tilde{x}_2 := \overline{x}_2 - \hat{\overline{x}}_2$$

则容易验证

$$\dot{\tilde{x}}_2 = (\overline{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{G}_2 \overline{\mathbf{A}}_{12}) \tilde{x}_2$$

故只要设计$\mathbf{G}_2$，使得上述系统矩阵所有特征值有负实部，就有

$$\tilde{x}_2 := \overline{x}_2 - \hat{\overline{x}}_2 \to 0$$

4）最后，求状态 x 的估计 $\hat{x}$ ：

根据前面的分析，我们有

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \hat{\bar{x}}_1 = y \\ \hat{\bar{x}}_2 = z + \mathbf{G}_2 y \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\bar{x}}_1 \\ \hat{\bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_q & 0 \\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}$$

这就是$\bar{x}$的估计，其中$y=\bar{x}_1$, 事实上无须估计。再由$\hat{x} = \mathbf{T}^{-1}\hat{\bar{x}}$，可知$\mathbf{T}^{-1}\hat{\bar{x}}$给出了$x$ 的估计$\hat{x}$

$$\mathbf{E}z+\mathbf{M}y=:\hat{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1^{-1} & -\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\\ 0 & \mathbf{I}_{n-q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{I}_q & 0\\ \mathbf{G}_2 & \mathbf{I}_{n-q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\ z\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1^{-1}[(\mathbf{I}_q-\mathbf{C}_2\mathbf{G}_2)y-\mathbf{C}_2z]\\ z+\mathbf{G}_2y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1^{-1}[(\mathbf{I}_q-\mathbf{C}_2\mathbf{G}_2)\\ \mathbf{G}_2\end{bmatrix}y$$

将其写成观测器的标准形式，并与**K***x* 观测器(5-29)相比较：

$$\hat{x}=w=\overbrace{\begin{bmatrix}-\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\\ \mathbf{I}_{n-q}\end{bmatrix}}^{\mathbf{E}}z+\overbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1^{-1}(\mathbf{I}_q-\mathbf{C}_2\mathbf{G}_2)\\ \mathbf{G}_2\end{bmatrix}}^{\mathbf{M}}y \qquad (5-46)$$

综合以上分析有：

$$\dot{z}=\overbrace{(\bar{\mathbf{A}}_{22}-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})}^{\mathbf{F}}z+\overbrace{(\bar{\mathbf{B}}_2-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{B}}_1)}^{\mathbf{N}}u$$
$$+\underbrace{[(\bar{\mathbf{A}}_{21}-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{11})+(\bar{\mathbf{A}}_{22}-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})\mathbf{G}_2]}_{\mathbf{G}}y \quad (5-45)$$

$$w=\hat{x}=\overbrace{\begin{bmatrix}-\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2\\ \mathbf{I}_{n-q}\end{bmatrix}}^{\mathbf{E}}z+\overbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1^{-1}(\mathbf{I}_q-\mathbf{C}_2\mathbf{G}_2)\\ \mathbf{G}_2\end{bmatrix}}^{\mathbf{M}}y \qquad (5-46)$$

问题： 这是一个$n\text{–}q$维的 **状 态 观 测 器** 吗？

——这只要验证若**(A,B)**可控，式（5-45）及式（5-46）的系数矩阵及存在矩阵**P**满足定理5-12的条件（5-32）即可。

因此，为了回答以上问题，核心是把矩阵**P**找到。注意到**P** 应当满足：

$$\mathbf{P}x - z \to 0$$

由于

$$z = (\hat{x}_2 - \mathbf{G}_2 y) = [-\mathbf{G}_2 \ \ \mathbf{I}]\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

$$= [-\mathbf{G}_2 \quad \mathbf{I}]\mathbf{T}\mathbf{T}^{-1}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = [-\mathbf{G}_2 \quad \mathbf{I}]\mathbf{T}\begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}$$

这启发我们取

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\mathbf{G}_2 & \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix}\mathbf{T}$$

则

$$\mathbf{P}x = \underbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{G}_2 & \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix}\mathbf{T}}_{\mathbf{P}} x = \begin{bmatrix} -\mathbf{G}_2 & \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix}\overline{x} = -\mathbf{G}_2 y + \overline{x}_2$$

所以：

$$\mathbf{P}x - z = -\mathbf{G}_2 y + \overline{x}_2 - (\hat{\overline{x}}_2 - \mathbf{G}_2 y) = \overline{x}_2 - \hat{\overline{x}}_2$$

(1) $\mathbf{F} = (\overline{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{G}_2\overline{\mathbf{A}}_{12})$稳定(因为（$\overline{\mathbf{A}}_{22}$，$\overline{\mathbf{A}}_{12}$）可观测）；

(2)验证：$\mathbf{PA} - \mathbf{FP} = \mathbf{GC}$：

为此，考虑

$$(\mathbf{PA}-\mathbf{FP})\mathbf{T}^{-1}=\mathbf{PT}^{-1}\mathbf{TAT}^{-1}-\mathbf{FPT}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}-\mathbf{G}_2 & \mathbf{I}_{n-q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12}\\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22}\end{bmatrix}-(\bar{\mathbf{A}}_{22}-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})\begin{bmatrix}-\mathbf{G}_2 & \mathbf{I}_{n-q}\end{bmatrix}$$

$$=[-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{11}+\bar{\mathbf{A}}_{21} \quad -\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12}+\bar{\mathbf{A}}_{22}]-(\bar{\mathbf{A}}_{22}-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})\begin{bmatrix}-\mathbf{G}_2 & \mathbf{I}_{n-q}\end{bmatrix}$$

$$=[\underbrace{-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{11}+\bar{\mathbf{A}}_{21}+(\bar{\mathbf{A}}_{22}-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})\mathbf{G}_2}_{\mathbf{G}} \quad 0]=\mathbf{GCT}^{-1}=\mathbf{G}[\underbrace{\mathbf{I}_{n-q} \quad 0}_{\mathbf{CT}^{-1}}]$$

$$\Rightarrow(\mathbf{PA}-\mathbf{FP})=\mathbf{GC}$$

$$(3)\ \mathbf{N}=\mathbf{PB}=\begin{bmatrix}-\mathbf{G}_2 & \mathbf{I}_{n-q}\end{bmatrix}\mathbf{TB}=\begin{bmatrix}-\mathbf{G}_2 & \mathbf{I}_{n-q}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{B}}_1\\ \bar{\mathbf{B}}_2\end{bmatrix};$$

$$(4)\ \mathbf{EP}+\mathbf{MC}=\begin{bmatrix}\mathbf{E} & \mathbf{M}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{P}\\ \mathbf{C}\end{bmatrix}=\mathbf{T}^{-1}\begin{bmatrix}0 & \mathbf{I}\\ \mathbf{I} & \mathbf{G}_2\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}-\mathbf{G}_2 & \mathbf{I}\\ \mathbf{I}_q & \mathbf{0}\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix}\mathbf{P}\\ \mathbf{C}\end{bmatrix}\mathbf{T}^{-1}}\mathbf{T}=\mathbf{I}$$

$\Rightarrow \mathbf{K}=\mathbf{I}$ 其中，用到了

$$\mathbf{T}\begin{bmatrix}-\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2 & \mathbf{C}_1^{-1}(\mathbf{I}_q-\mathbf{C}_2\mathbf{G}_2)\\ \mathbf{I}_{n-q} & \mathbf{G}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{I}\\ \mathbf{I} & \mathbf{G}_2\end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}\Uparrow\ \mathrm{E} & \Uparrow\ \mathrm{M}\end{array}$$

结论: 以上分析表明，(5-45)、(5-46)确实给出了一个 $n\text{-}q$ 维的状态观测器。现将以上结论总结如下：

定理5-18 若（**A, C**）可观测，$rank\mathbf{C}=q$，则对 (**A, B, C**）可构造 $n-q$ 维状态观测器(5-45),(5-46)，而且观测器的极点可任意配置。若再假定（**A, B**）可控，则该观测器具有最小维数。

事实上，若假定（**A, B**）可控，定理5-12的基本条件：(**A, B**）可控、(**F**, **E**)可观测满足。此时，根据定义 5–1可知，当**K=I**时就构成了一个$(n-q)$维的状态观测器，而定理5– 17表明，它是一个最小维观测器。

最小维观测器算法步骤：

1 取等价变换 $\overline{x} = \mathbf{T}x$

2 导出关于 $\bar{x}_2$ 的状态方程和输出方程，为进一步构造状态观测器作准备；

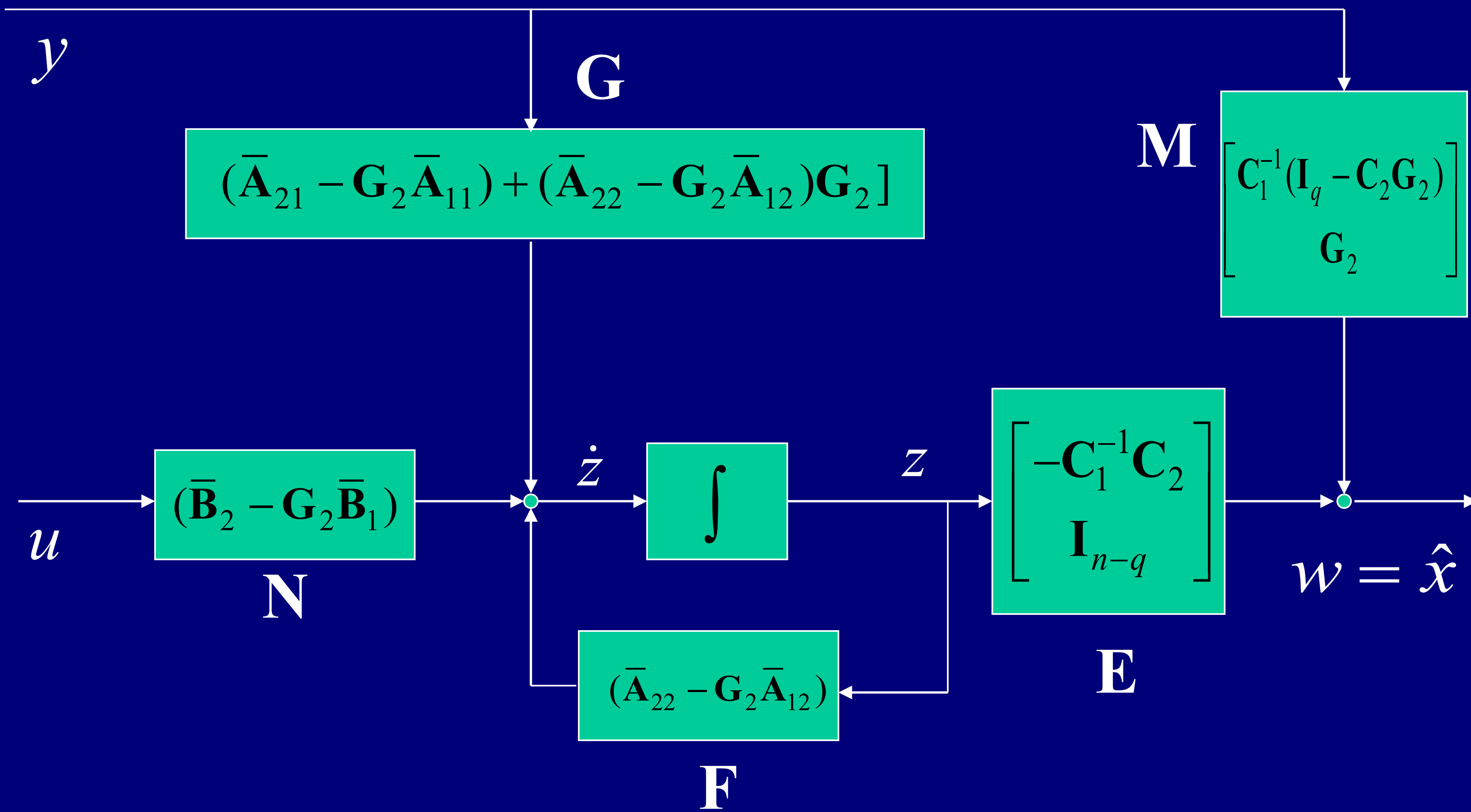
3 由于$(\overline{\mathbf{A}}_{22}, \overline{\mathbf{A}}_{12})$的可观测性，求取$\mathbf{G_2}$使得$\overline{\mathbf{A}}_{22}$-$\mathbf{G_2}\overline{\mathbf{A}}_{12}$稳定

4 建立n–q 维系统的全维（n–q）状态观测器。

$$\dot{z} = (\overline{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{G}_2\overline{\mathbf{A}}_{12})z + (\overline{\mathbf{B}}_2 - \mathbf{G}_2\overline{\mathbf{B}}_1)u + [(\overline{\mathbf{A}}_{21} - \mathbf{G}_2\overline{\mathbf{A}}_{11}) + (\overline{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{G}_2\overline{\mathbf{A}}_{12})\mathbf{G}_2]y \quad (5-45)$$

5 最后，求状态 x 的估计 $\hat{x}$。

$$\hat{x} = w = \overbrace{\begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix}}^{\mathbf{E}} z + \overbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{-1}(\mathbf{I}_q - \mathbf{C}_2\mathbf{G}_2) \\ \mathbf{G}_2 \end{bmatrix}}^{\mathbf{M}} y \qquad (5-46)$$



$$\Sigma_0:\begin{cases}\dot{z}=\mathbf{F}z+\mathbf{N}u+\mathbf{G}y, & z\in\mathbf{R}^{n-q}\\ w=\hat{x}=\mathbf{E}z+\mathbf{M}y, & w\in\mathbf{R}^{n}\end{cases}\qquad(5-29)$$

n-*q* 维（最小维）状态观测器结构图

例5-10 设系统如下：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

因$rank\,\mathbf{C}=2$，故可设计一维观测器。为此，首先作变换：

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{T}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

则

$$\bar{\mathbf{A}}=\left[\begin{array}{cc:c}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ \hdashline 0 & 0 & 1\end{array}\right],\quad \bar{\mathbf{B}}=\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 2\\ \hdashline 0 & 1\end{array}\right],\quad \bar{\mathbf{C}}=\left[\begin{array}{cc:c}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{array}\right]$$

因此，

$$\bar{\mathbf{A}}_{11}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad \bar{\mathbf{A}}_{12}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\quad \bar{\mathbf{A}}_{21}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\quad \bar{\mathbf{A}}_{22}=1$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\quad \bar{\mathbf{B}}_{2}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\qquad \bar{\mathbf{C}}_{1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad \bar{\mathbf{C}}_{2}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

令$\mathbf{G}_2=[g_1\ \ g_2], y:=[y_1\ y_2]^T, u=[u_1\ u_2]^T$

利用(5-45）可得一阶状态观测器为：

$$\begin{aligned}\dot{z}&=(\bar{\mathbf{A}}_{22}-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})z+(\bar{\mathbf{B}}_2-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{B}}_1)u\\ &+[(\bar{\mathbf{A}}_{21}-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{11})+(\bar{\mathbf{A}}_{22}-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})\mathbf{G}_2]y\\ &=(1-g_2)z-g_1u_1+(1-2g_2)u_2+(2g_1-g_1g_2)y_1-g_2^2y_2\end{aligned}$$

利用(5-46)，可得

$$\hat{x} = w = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{-1}(\mathbf{I}_q - \mathbf{C}_2\mathbf{G}_2) \\ \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} y$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -g_1 & 1-g_2 \\ g_1 & g_2 \end{bmatrix} y$$

最后，需要指出，**K**x观测器的维数可能会比 $n-q$ 低，究竟低到什么程度则尚不清楚。

状态观测器小结

1）当(**A**,**B**,**C**)可控、可观测时，则一定存在系统的基本全维状态观测器 和**K**x状态观测器 。

2）当(**A**,**B**,**C**)可控、可观测且

$$rank\mathbf{C}=q$$

时，可求得其最小维状态观测器。

3）最小维**K**x状态观测器存在性问题？

例题 系统方程为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

当取 $\mathbf{K}=[\,0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\,]$时，$\mathbf{K}x$观测器为

$$\dot{z}=-3z-[2\quad 5]y+u$$
$$w=z+[1\quad 3]y$$

其维数小于n–2=2。

§ 5-3　利用观测器构成的状态反馈系统

一、基于观测器的状态反馈系统的构成

设原系统(对象)方程为

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u\,,\quad y = \mathbf{C}x \qquad (5\text{-}48)$$

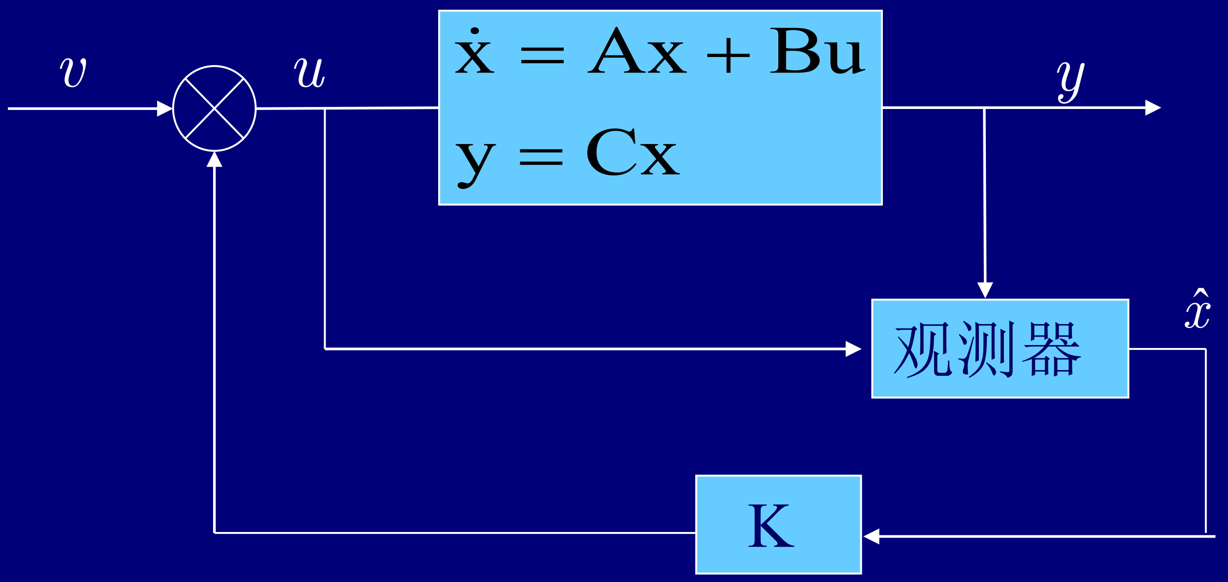
且(A,B,C)可控、可观。若状态x不可测量，很自然想到：是否可用 $\hat{x}$ 来代替 x 形成状态反馈？即

$$u = v + \mathbf{K}\hat{x}$$

n 维状态观测器的方程为：

$$\dot{\hat{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\hat{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{G}y \qquad (5\text{-}49)$$

由对象、观测器和状态反馈组合而成的闭环系统的方块图,如下图所示。



此时， $u=\mathbf{K}\hat{x}+v$， 闭环系统为组合系统：

$$\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u = \mathbf{A}x + \mathbf{BK}\hat{x} + \mathbf{B}v \\ \dot{\hat{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{GC})\hat{x} + \mathbf{G}y + \mathbf{B}u = (\mathbf{A} - \mathbf{GC} + \mathbf{BK})\hat{x} + \mathbf{G}y + \mathbf{B}v \\ y = \mathbf{C}x \end{cases}$$

二、基于观测器的状态反馈系统的特性

1.组合系统的矩阵表达形式

这里考虑 n 维状态观测器。组合系统：

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{BK}\hat{x} + \mathbf{B}v, \quad y = \mathbf{C}x \tag{S-1}$$

$$\dot{\hat{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{GC} + \mathbf{BK})\hat{x} + \mathbf{G}y + \mathbf{B}v \tag{S-2}$$

图5-5所示的闭环系统是一个 $2n$ 维的系统。根据(S-1)式和(S-2)式可得到闭环的动态方程式为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{GC} & \mathbf{A} - \mathbf{GC} + \mathbf{BK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} \tag{5-50}$$

2. 组合系统的可控性：分离性原理

将(5-50) 式的动态方程进行如下的坐标变换

$$\begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix}$$

变换后，所得到的动态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\tilde{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{A}-\mathbf{GC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} v \qquad (5\text{-}51)$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \tilde{x} \end{bmatrix}$$

可控性分解

其中，$\tilde{x} = x - \hat{x}$。

注意到上式是可控性分解的形式，不可控部分 $\mathbf{A}-\mathbf{GC}$ （**这说明观测器的所有模态均是不可控的模态**）在传递函数的计算过程中将被消去，闭环系统的传递函数由可控部分决定，所以可得

$$\mathbf{G}_f(s)=\mathbf{C}[s\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})]^{-1}\mathbf{B}$$

这说明用 $\hat{x}$ 代替 x 作反馈未影响系统的输入输出关系，也即：

观测器的引入不改变原系统的传递函数阵。

从(5-51)式可知，这时闭环系统矩阵的特征式可计算如下

$$\det\left\{s\mathbf{I}_{2n}-\begin{bmatrix}\mathbf{A}+\mathbf{BK} & -\mathbf{BK}\\ 0 & \mathbf{A}-\mathbf{GC}\end{bmatrix}\right\}$$

$$=\det[s\mathbf{I}_n-(\mathbf{A}+\mathbf{BK})]\det[s\mathbf{I}_n-(\mathbf{A}-\mathbf{GC})]$$

上式表明：**状态反馈系统的动态特性和观测器的动态特性是相互独立的**。这一特性的意义在于：

观测器的引入不影响由状态反馈阵K所配置的极点

$$\{\lambda_i(\mathbf{A}+\mathbf{BK}), i=1,2,\cdots,n\}$$

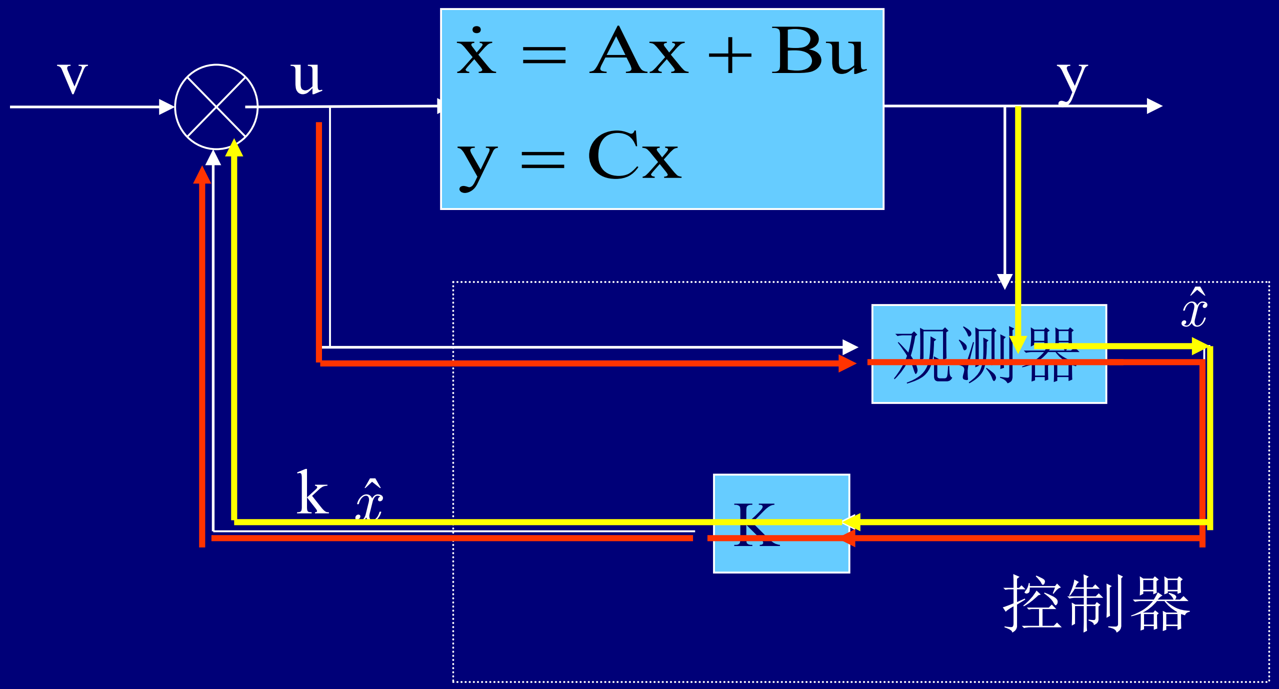
状态反馈也不影响设计好的观测器的特征值

$$\{\lambda_i(\mathbf{A}-\mathbf{GC}), i=1,2,\cdots,n\}$$

分离性原理：若系统(**A**, **B**, **C**)可控、可观，对于基于观测器的状态反馈系统，状态反馈律的设计和观测器的设计可独立地分开进行。

因此，若系统是可控、可观的，则可按闭环极点配置的需要选择反馈增益阵**K**，然后按观测器的动态要求选择**G**，**G**的选择并不影响已配置好的闭环传递函数的极点。

通常把反馈增益阵和观测器一起称为控制器，这一控制器的输入是对象(**A**, **B**, **C**)的输入信号和输出信号，控制器的输出是状态估计值的线性函数，它作为反馈信号构成闭环控制，如图所示。



由对象的输入经过观测器形成一个反馈信号，

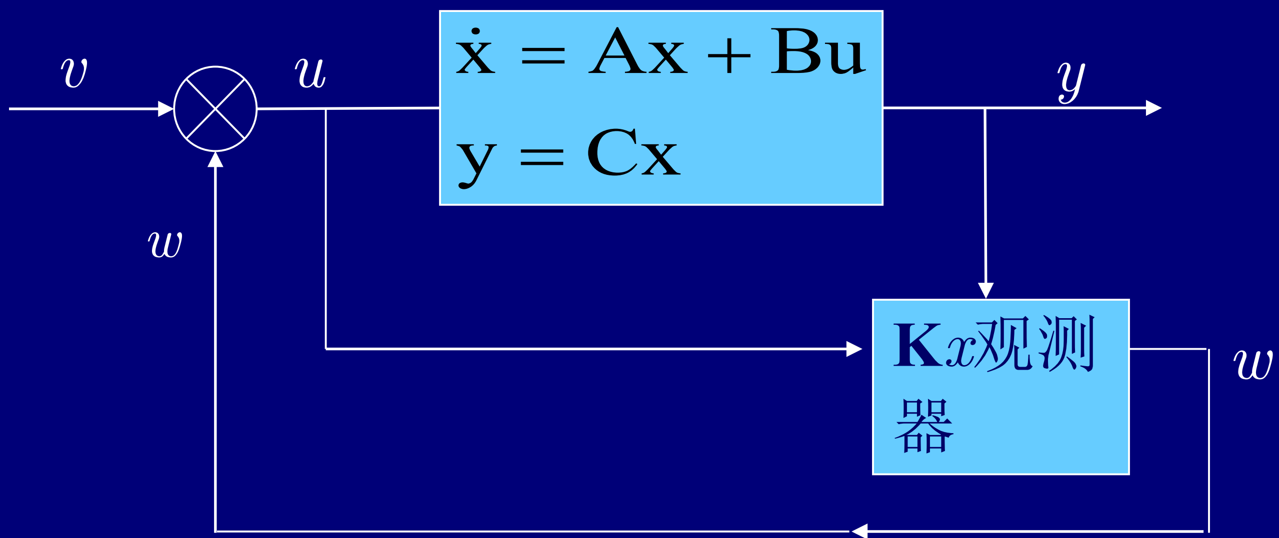
另一反馈信号由对象的输出经过观测器所形成，

这种结构称为**输入、输出反馈结构**，是动态补偿器的一种形式。

3. 采用Kx观测器构成的反馈系统

问题： 用 Kx 观测器来实现状态反馈时，分离特性是否成立？

组合系统结构图如下：



Kx 观测器构成的闭环系统

组合系统数学描述：

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u, \quad y = \mathbf{C}x$$

$$\dot{z} = \mathbf{F}z + \mathbf{N}u + \mathbf{G}y, z \in \mathbf{R}^r$$

$$w = \mathbf{E}z + \mathbf{M}y, w \in \mathbf{R}^p$$

$$u = v + w$$

进一步写成：

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}(v + w) = \mathbf{A}x + \mathbf{B}(v + \mathbf{E}z + \mathbf{MC}x)$$

$$= (\mathbf{A+BMC})x + \mathbf{BE}z + \mathbf{B}v$$

$$\dot{z} = (\mathbf{GC+NMC})x + (\mathbf{F} + \mathbf{NE})z + \mathbf{N}v$$

$$y = \mathbf{C}x$$

用矩阵表示：
$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A+BMC} & \mathbf{BE}\\ \mathbf{GC+NMC} & \mathbf{F+NE}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{B}\\ \mathbf{N}\end{bmatrix}v$$
$$y=\begin{bmatrix}\mathbf{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}$$
根据定理5-12，存在$\mathbf{P}\in\mathbf{R}^{r\times n}$：

$$(1)\quad \mathrm{Re}\,\lambda_i(\mathbf{F})<0 \qquad (i=1,2,\cdots,n);$$
$$(2)\quad \mathbf{PA}-\mathbf{FP}=\mathbf{GC}$$
$$(3)\quad \mathbf{N}=\mathbf{PB}$$
$$(4)\quad \mathbf{K}=\mathbf{EP}+\mathbf{MC}$$

进行如下的坐标变换

$$\begin{bmatrix}x\\ e\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & 0\\ \mathbf{P} & -\mathbf{I}_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{P}}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & 0\\ \mathbf{P} & -\mathbf{I}\end{bmatrix} \qquad \tilde{\mathbf{P}}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & 0\\ \mathbf{P} & -\mathbf{I}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}+\mathbf{BK} & -\mathbf{BE} \\ 0 & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} v$$

$$y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ e \end{bmatrix}, \quad e = \mathbf{P}x - z$$

可见，分离性原理依然成立。

4. 含观测器的状态反馈系统的缺点

一般说来，包含观测器的状态反馈系统在鲁棒性上较直接状态反馈系统来得差（可参见 J.C. Doyle and G. Stein, Robustness with observers, IEEE AC, 1979, No.4)。通常，应使观测器的特征值的负实部是**A**+**BK**的2到3倍，即

$$\mathrm{Re}\,\lambda_i(\mathbf{A}-\mathbf{GC})=(2\sim 3)\,\mathrm{Re}\,\lambda_i(\mathbf{A}+\mathbf{BK})$$

事实上，若观测器的极点的实部与系统所要配置的实部相差不大，则观测器状态 $\hat{x}$ 接近于对象状态x的速度就慢，用 $\hat{x}$ 代替x的效果自然就不好。

5. 设计举例

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

要用状态反馈将系统的特征值配置到$\{-1,-2,-3\}$，并且用降维观测器来实现所需要的反馈。

根据分离性原理，设计可分两部分进行。

1).设计状态反馈阵K，使极点配置在{−1,−2, −3}

显然， **A**是循环阵，故由推论5-2，取

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\mathbf{BL}\in \operatorname{Im}\mathbf{B},\quad \mathbf{L}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

则可验证($\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$)可控。考虑单输入系统：

$$\dot{x}=\mathbf{A}x+\mathbf{b}v,\quad y=\mathbf{C}x$$

利用状态变换$\overline{x}=\mathbf{P}x$，将上述方程化为可控标准形：

$$\dot{\overline{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-1&1&1\end{bmatrix}\overline{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}v,\quad \mathbf{P}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1&2&-3\\-1&2&-1\\1&2&1\end{bmatrix}$$

由$\{-1,-2,-3\}$可得期望的闭环极点多项式为

$$s^3+6s^2+11s+6$$

解得$\bar{\mathbf{K}}_1=[-5\ \ -12\ \ -7]\Rightarrow \mathbf{K}_1=\bar{\mathbf{K}}_1\mathbf{P}=[0\ \ -12\ \ \ 5]$

因此，$\mathbf{bK}_1=\mathbf{BLK}_1\Rightarrow \mathbf{K}=\mathbf{LK}_1=\begin{bmatrix}0 & -12 & 5\\ 0 & -12 & 5\end{bmatrix}$

即若状态可测量（但实际上不可测量），经状态反馈后的系统为：

$$\dot{x}=(\mathbf{A}+\mathbf{BK})x+\mathbf{B}v=(\mathbf{A}+\mathbf{BLK}_1)x+\mathbf{B}v$$

2). 根据分离性原理，再单独设计降维观测器。

由例5-10，

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{T}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}}=\left[\begin{array}{cc:c}-1&0&0\\0&1&1\\\hdashline 0&0&1\end{array}\right],\quad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&2\\\hdashline 0&1\end{array}\right],\quad \mathbf{C}=\left[\begin{array}{cc:c}1&0&0\\0&1&0\end{array}\right]$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{11}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad \bar{\mathbf{A}}_{12}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\quad \bar{\mathbf{A}}_{21}=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}\quad \bar{\mathbf{A}}_{22}=1$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\quad \bar{\mathbf{B}}_{2}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\quad \bar{\mathbf{C}}_{1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\quad \bar{\mathbf{C}}_{2}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$$

令

$$\mathbf{G}_2=[g_1 \quad g_2],\quad y=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\end{bmatrix}, u=\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

利用(5-45) 可得一阶状态观测器为:

$$\begin{aligned}\dot{z}&=(\bar{\mathbf{A}}_{22}-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})z+(\bar{\mathbf{B}}_2-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{B}}_1)u\\ &\quad+[(\bar{\mathbf{A}}_{21}-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{11})+(\bar{\mathbf{A}}_{22}-\mathbf{G}_2\bar{\mathbf{A}}_{12})\mathbf{G}_2]y\\ &=(1-g_2)z-g_1u_1+(1-2g_2)u_2+(2g_1-g_1g_2)y_1-g_2^2y_2\\ &=-4z-9u_2-25y_2,\quad (g_1=0, g_2=5)\end{aligned}$$

利用(5-46) 可得

$$\hat{x} = w = \begin{bmatrix} -\mathbf{C}_1^{-1}\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{I}_{n-q} \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^{-1}(\mathbf{I}_q - \mathbf{C}_2\mathbf{G}_2) \\ \mathbf{G}_2 \end{bmatrix} y$$

$$= \left[\begin{array}{c} 0 \\ -1 \\ \hdashline 1 \end{array}\right] z + \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -g_1 & 1-g_2 \\ \hdashline g_1 & g_2 \end{array}\right] y = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} y$$

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$\mathbf{C}_1$ $\mathbf{C}_2$

$$\dot{z} = (1 - g_2)z - g_1 u_1 + (1 - 2g_2)u_2 + (2g_1 - g_1 g_2)y_1 - g_2^2 y_2$$

$$\hat{x} = w = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -g_1 & 1 - g_2 \\ g_1 & g_2 \end{bmatrix} y$$

$$\begin{aligned} \dot{z} &= -4z - 9u_2 - 25y_2 \\ &= -4z - 9\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} u - 25\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} y \end{aligned}$$

$$\hat{x} = w = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} z + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} y$$

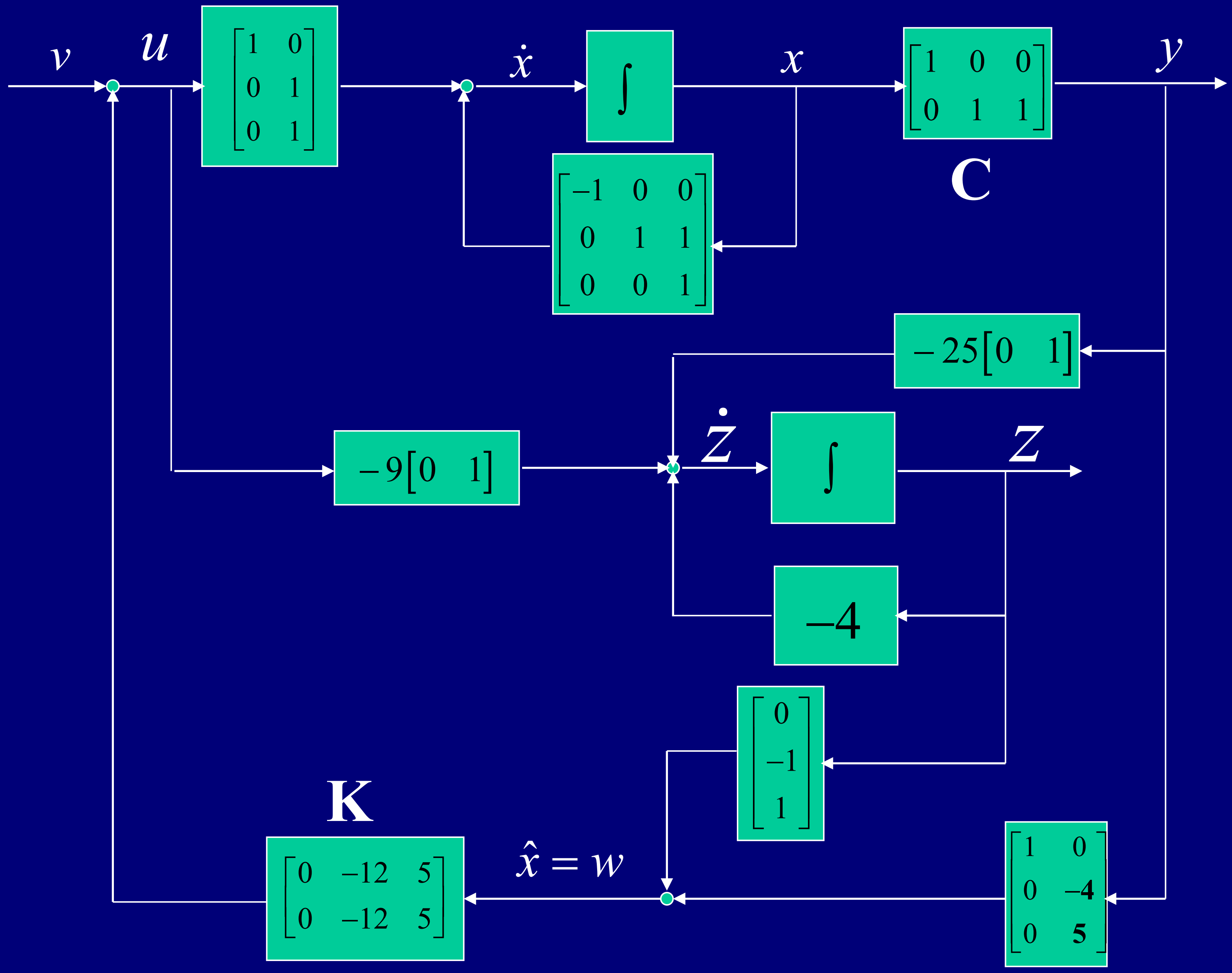
3).包含状态反馈和降维观测器的闭环系统方程为：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}u,\quad y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}x$$

$$\dot{z}=-4z-9u_2-25y_2=-4z-9\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}u-25\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}y$$

$$\hat{x}=w=\begin{bmatrix}0\\ -1\\ 1\end{bmatrix}z+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -4\\ 0 & 5\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -4\\ 1 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z\\ y\end{bmatrix}$$

$$u=\mathbf{K}\hat{x}+v=\underbrace{\begin{bmatrix}0 & -12 & 5\\ 0 & -12 & 5\end{bmatrix}}_{\mathbf{K}}\hat{x}+v$$



v
u
$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$
$\dot{x}$
$\int$
x
$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$
y
$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$
C
$-25\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$
$-9\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$
$\dot{Z}$
$\int$
Z
-4
$\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$
K
$\begin{bmatrix}0 & -12 & 5\\0 & -12 & 5\end{bmatrix}$
$\hat{x} = w$
$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -4\\0 & 5\end{bmatrix}$

$$\dot{z} = -4z - 9u_2 - 25y_2 = -4z - 9\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}u - 25\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}y$$

$$y(s) = \mathbf{G}_0(s)u(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s)$$

记 $u(s) = u_1(s) + v(s) = \mathbf{K}\hat{x} + v$

其中

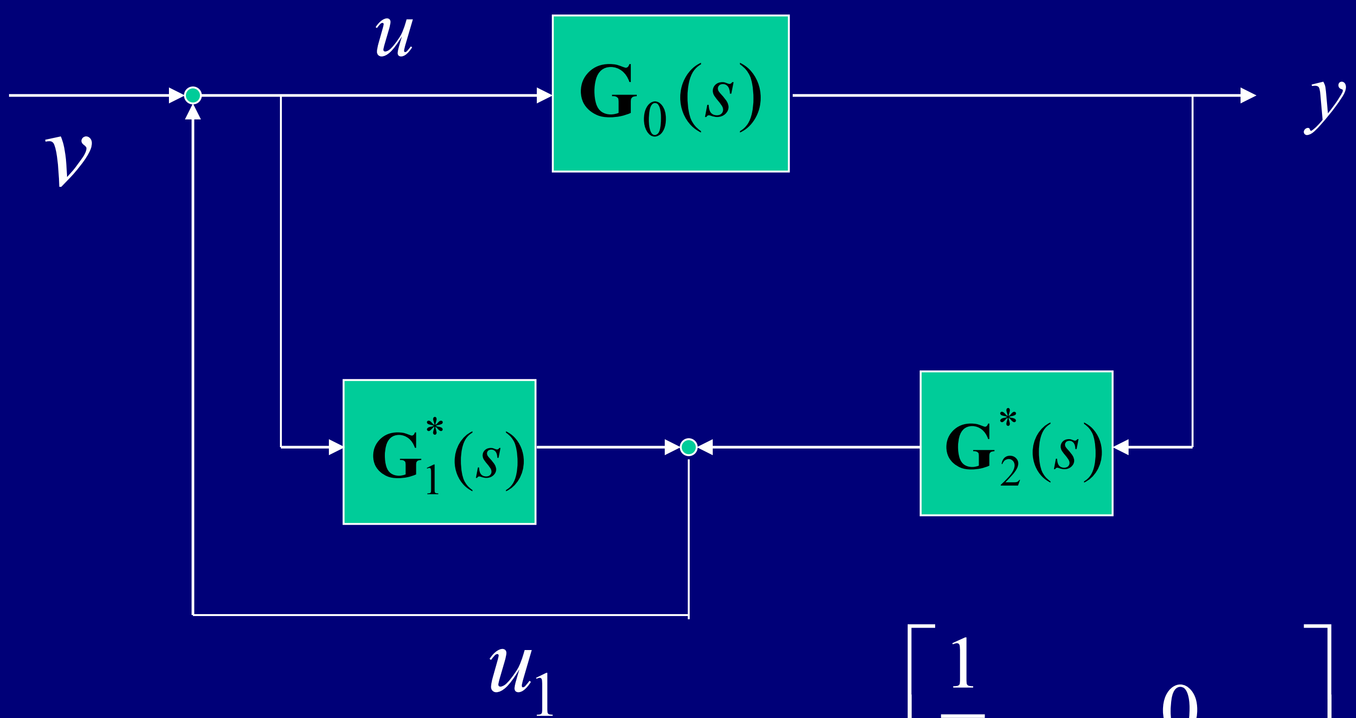
$$u_1(s) = \underbrace{\begin{bmatrix}0 & -12 & 5\\0 & -12 & 5\end{bmatrix}}_{\mathbf{K}}\left(\underbrace{\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}z(s) + \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -4\\0 & 5\end{bmatrix}y(s)}_{\hat{x}}\right)$$

将

$$z(s) = \frac{1}{s+4}\{-9\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}u(s) - 25\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}y(s)\}$$

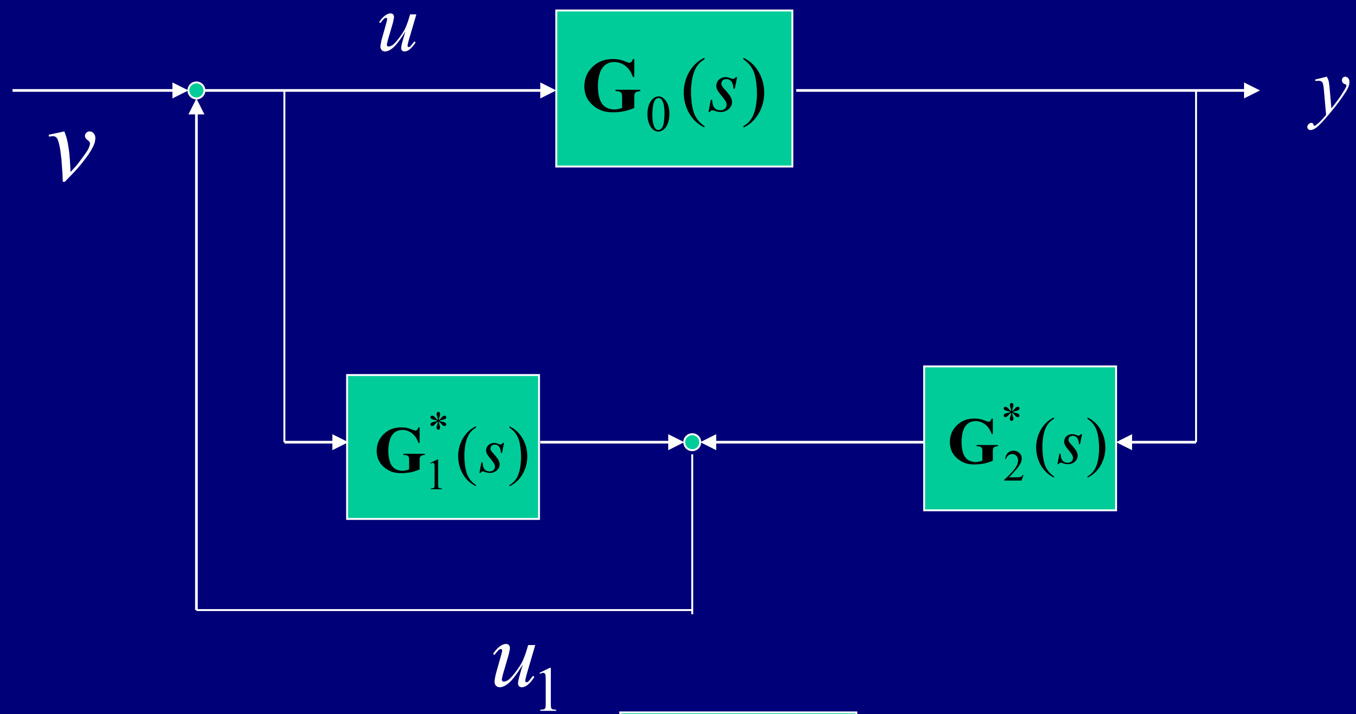
代入上式，有

$$u_1(s) = \frac{1}{s+4}\{\begin{bmatrix}0 & -153\\0 & -153\end{bmatrix}u(s) - \begin{bmatrix}0 & 73s-133\\0 & 73s-133\end{bmatrix}y(s)\}$$

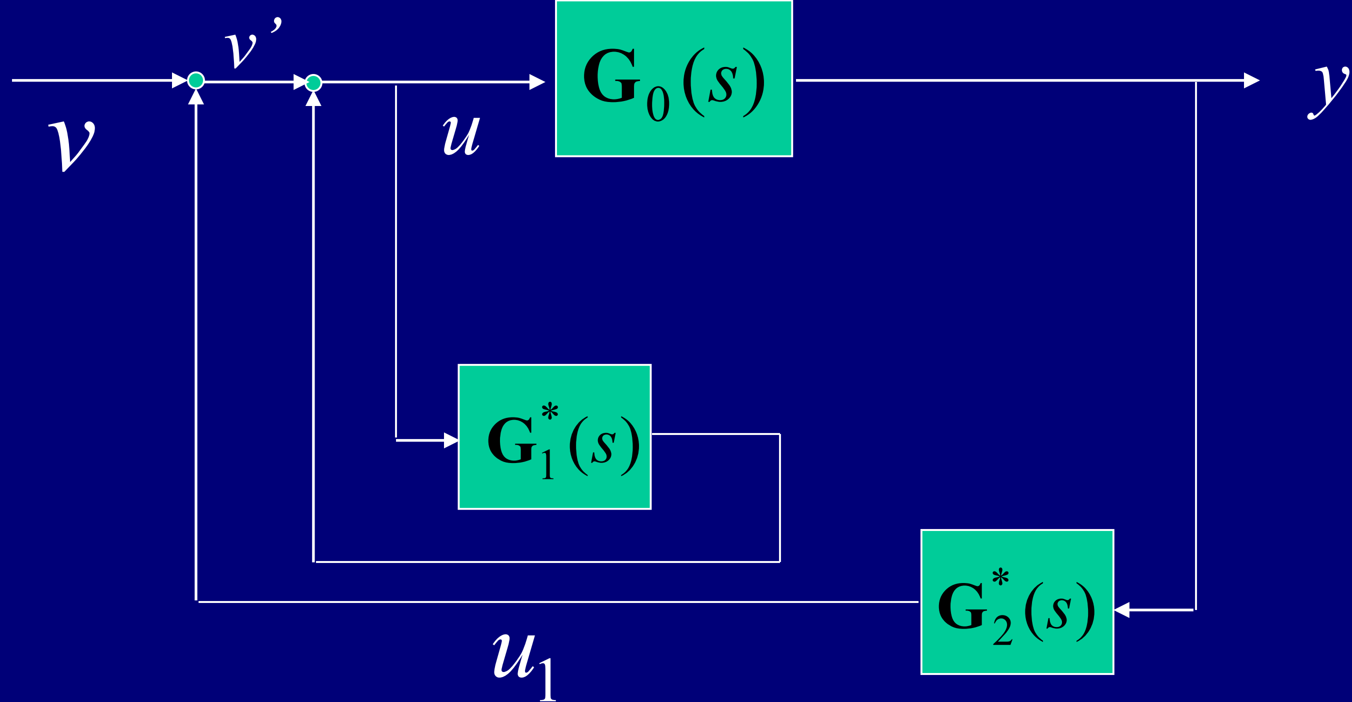


其中， $\mathbf{G}_0(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s} & 0 \\ 0 & \dfrac{2s-1}{(s-1)^2}\end{bmatrix}$

$$\mathbf{G}_1^*(s)=\frac{1}{s+4}\begin{bmatrix}0 & -153 \\ 0 & -153\end{bmatrix},\quad \mathbf{G}_2^*(s)=\frac{1}{s+4}\begin{bmatrix}0 & 73s-133 \\ 0 & 73s-133\end{bmatrix}$$

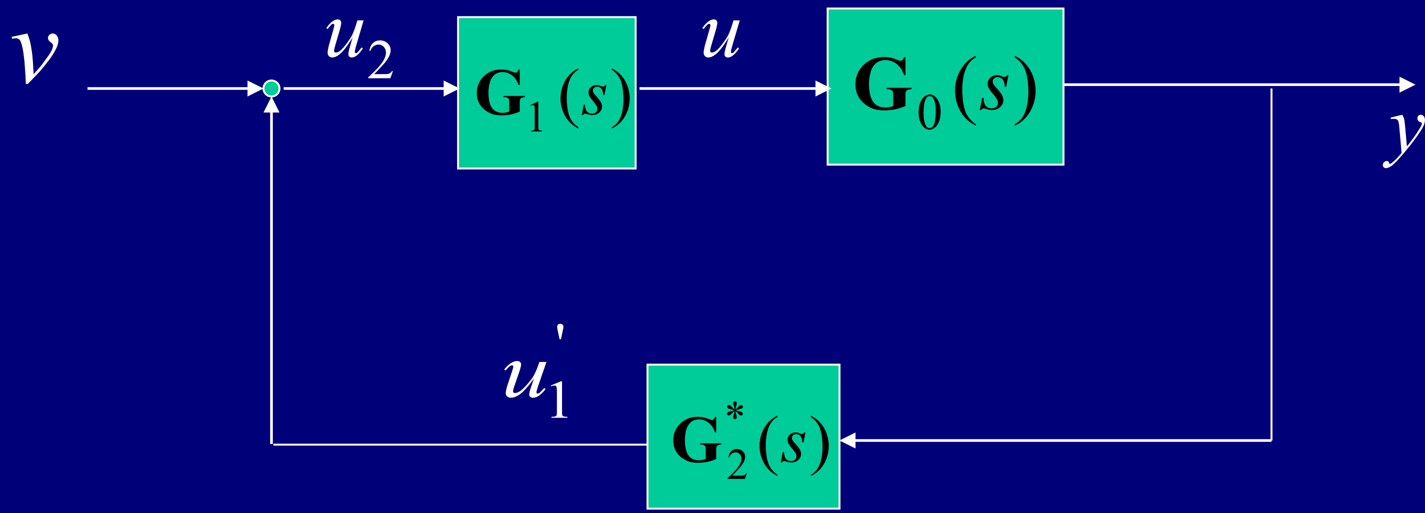


u
$\mathbf{G}_0(s)$
v
y
$\mathbf{G}_1^*(s)$
$\mathbf{G}_2^*(s)$
u_1



v'
$\mathbf{G}_0(s)$
y
v
u
$\mathbf{G}_1^*(s)$
$\mathbf{G}_2^*(s)$
u_1

进而，对以上结构图作等效变换，有：



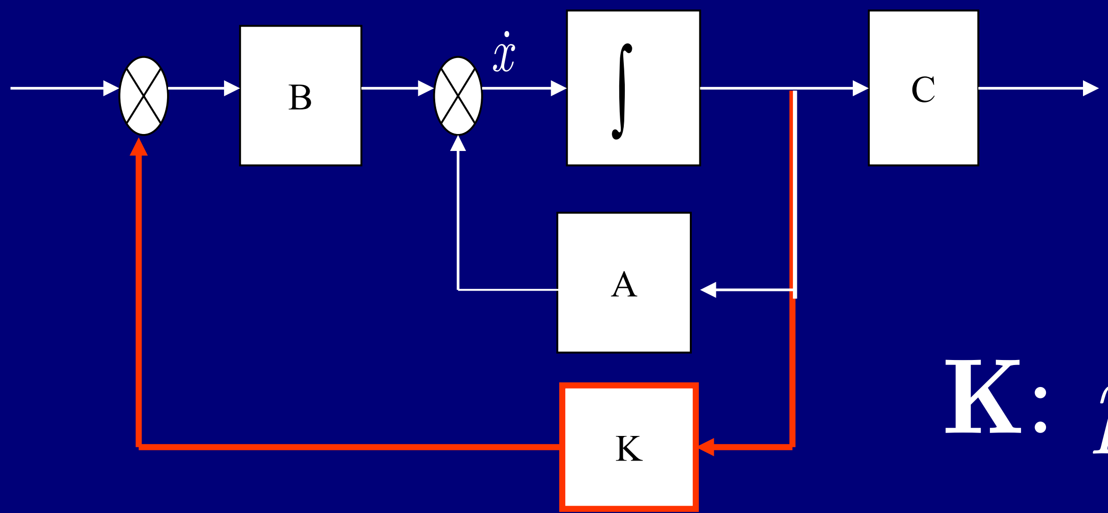
这里，

$$\mathbf{G}_1(s) = (\mathbf{I} - \mathbf{G}_1^*(s))^{-1}$$

这说明：从输入输出的关系看，基于观测器的状态反馈其效果相当于加入了一个串联校正和反馈校正。因此，对观测器的讨论使我们对控制器设计有了更深入的认识。

§5-3 状态反馈、静态输出反馈、动态输出反馈

一、状态反馈



$\mathbf{K}$: $p \times n$

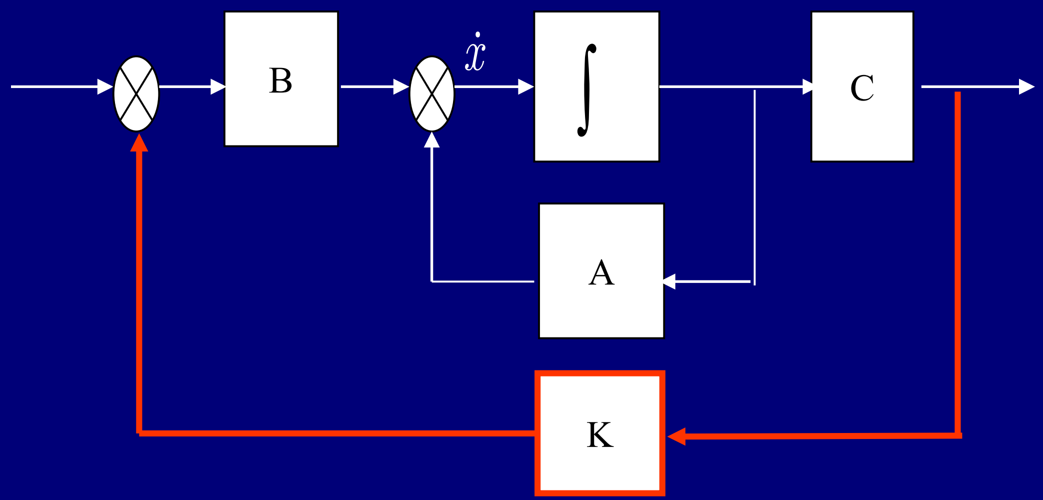
系统方程 $\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$

$y = \mathbf{C}x$

控制律 $u = \mathbf{K}x + v$

闭环系统方程 $\dot{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{K})x + \mathbf{B}v$

二、静态输出反馈



$\mathbf{K}$: $p \times q$

系统方程 $\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$

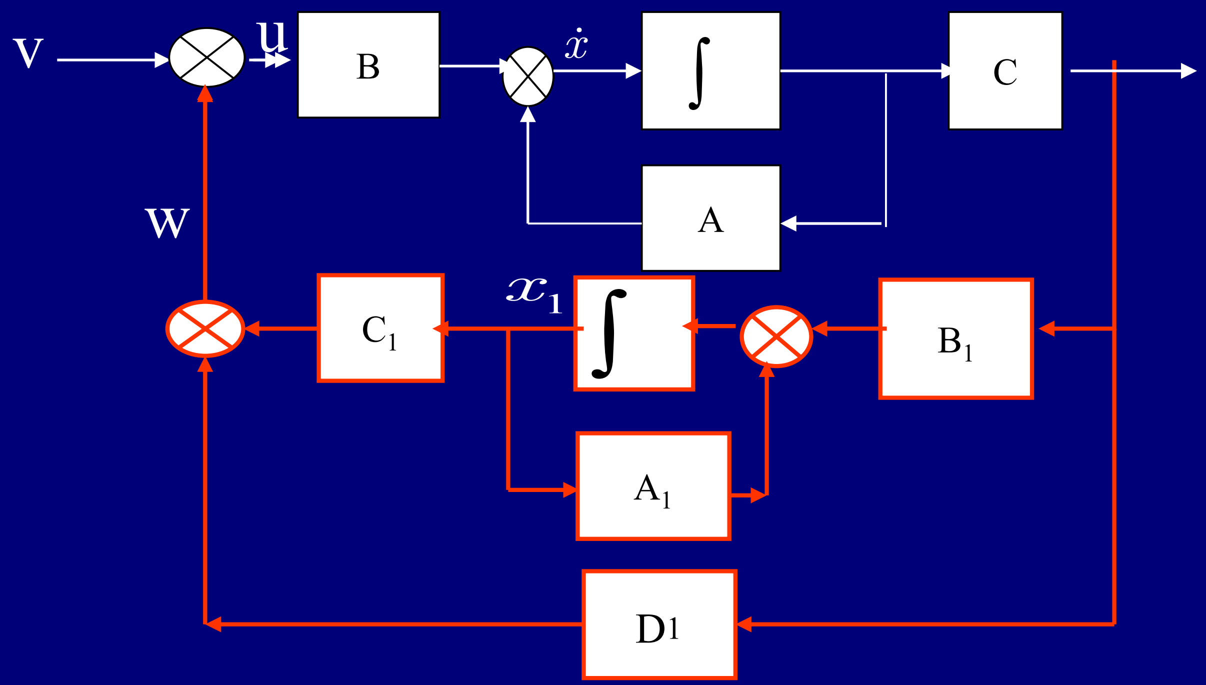
$y = \mathbf{C}x$

控制律 $u = \mathbf{K}y + v$

闭环系统方程 $\dot{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{BKC})x + \mathbf{B}v$

若**C**是可逆方阵，就成为状态反馈的情况。

三、动态输出反馈



系统方程

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

控制律 $u = w + v$

补偿器

$$\dot{x}_1 = A_1 x_1 + B_1 y \qquad A_1 \in R^{m\times m}$$
$$w = C_1 x_1 + D_1 y$$

m阶动态输出反馈

闭环系统方程

$$
\begin{array}{c} n \\ m \end{array}
\quad
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_1\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{C}_1 \\ \mathbf{B}_1\mathbf{C} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} v
$$

$$
y = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_1 \end{bmatrix} \qquad \text{(S-1)}
$$

动态输出反馈的设计问题可以化为一个静态输出反馈问题来讨论。

静态输出反馈在 **C=I** 时就是状态反馈。动态输出反馈的设计问题可以化为一个扩维的静态输出反馈问题。

对象：

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0 \\ 0 & \mathbf{0}_m \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \bar{u}$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \bar{x}$$

控制律：$\bar{u} = \bar{v} + \mathbf{H}\bar{y}$

闭环系统方程

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BH}_{11}\mathbf{C} & \mathbf{BH}_{12} \\ \mathbf{H}_{21}\mathbf{C} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{\mathbf{m}} \end{bmatrix} \bar{v}$$

动态输出反馈闭环系统：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BD}_1\mathbf{C} & \mathbf{BC}_1 \\ \mathbf{B}_1\mathbf{C} & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0 \end{bmatrix} v$$

作业：P. 173 5.8-5.10，

5.11 求出基于观测器的状态反馈的输入-输出反馈形式