第十四讲

稳定性基本概念

参考书

1. 高为炳编著：**运动稳定性基础**，高等教育出版社，1987 年5月

2. 黄琳：**稳定性理论**，北京大学出版社， 1992 年 7月

3. 秦元勋、王慕秋、王联：

运动稳定性理论与应用, 科学出版社, 1980年

4. 王柔怀、伍卓群编：

常微分方程讲义, 人民教育出版社, 1978年5月

5. 黄琳：**稳定性与鲁棒性的理论基础**,科学出版社，2003年2月

6. LaSalle, J. P., ***Stability by Lyapunov direct method***, New York: Academic Press, 1961.

7. Hahn, W., ***Stability of motion***, New York, Springer-Verlag, 1967.

8. Desoer, C. A. and Vidyasagar, M., ***Feedback systems: Input-output properties***, New York: Academic Press, 1975.

回忆：解的存在性、唯一性及对初值的连续依赖性

定理1（存在性及唯一性定理）：对于微分方程

$$\dot{x} = f(x,t)$$

若 $f(x,t)$ 在 $\mathbf{W}\times\mathbf{I}$ 域内连续且满足*Lipschitz* 条件，则对任意的初始条件

$$(x_0,\ t_0)\in\mathbf{W}\times\mathbf{I},$$

总存在常数$a>0$，使得有唯一解

$$x=x(t,\ t_0,\ x_0)$$

在$[t_0-a,\ t_0+a]$上存在、对t 连续，且满足初始条件 $x(t_0)=x_0$。

定理2（解对初值的连续依赖性）： 在定理1的条件下，若$f(x,t)$ 在域内连续且满足$Lipschitz$ 条件，则微分方程的解 $x(t,\ t_0,\ x_0)$ 作为$t,\ t_0,\ x_0$的函数在它的存在范围内是连续的，即

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得当 $\|x(t_0)-\psi(t_0)\|<\delta$ 时，有

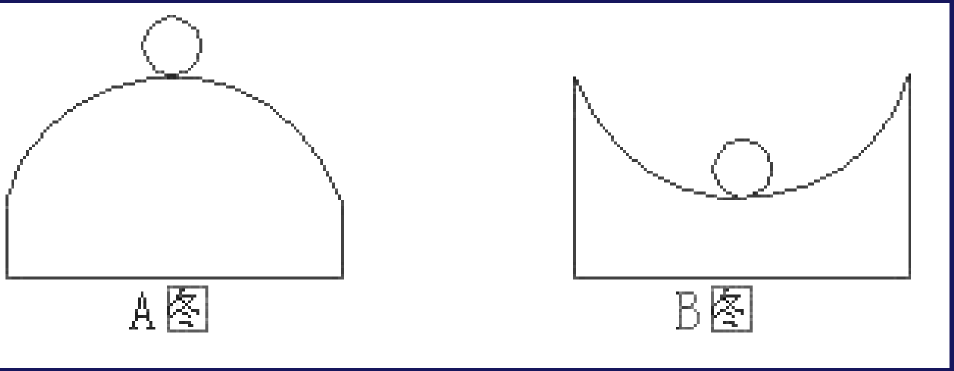
$$\|x(t,\ t_0,\ x(t_0))-\psi(t,\ t_0,\ \psi(t_0))\|<\varepsilon,$$

$$a\leqslant t\leqslant b\ ,\ a\leqslant t_0\leqslant b$$

以上定理说明： 若在初始时刻$x(t_0)$和$\psi(t_0)$ 十分接近，则在定义域$[a,\ b]$内的解$x(t)$和$\psi(t)$ 也会十分接近。

问题：当初值变动时，对应的解当时间$t>t_0$及趋向于无穷时，解变化如何？

稳定性的直观定义



稳定性直观定义：当一个实际的系统处于一个平衡的状态时，如果受到外来作用的影响，系统经过一个过渡过程仍然能够回到原来的平衡状态，我们称这个状态就是**稳定**的，否则称为**不稳定**。

Lyapunov稳定性

Lyapunov稳定性的概念是微分方程解对初值的连续依赖性这一概念在无穷时间区间上的推广和发展。**稳定性的核心是研究解的渐近性质**。

一、平衡状态的稳定性

1.平衡状态

考虑系统： $\dot{x} = f(x,t), \quad x \in \mathbf{R}^n$

若随着时间t的变化，状态 $x=x_e$保持不变，则称这个状态为系统的**平衡状态**。由于平衡状态也是系统的一个状态，故它是上述微分方程的一个解，即

$$f(x_e,t)=0$$

例： 考虑微分方程$\dot{x} = \mathbf{A}(t)x$，显然$x_e = 0$是它的一个解并且是它的一个平衡状态。

2. 简化的平衡状态

在初始时刻 t_0 时,干扰引起的状态向量 x_0 与平衡状态 x_e 之差

$$y_0 = x_0 - x_e$$

称为**初始扰动向量**。由 x_0 所决定的运动过程

$$\dot{x} = f(x,t)$$

的解, 称为**被扰运动**，记为$x(t) = x(t, t_0, x_0)$。

由于平衡状态和被扰运动均为微分方程

$\dot{x} = f(t, x)$的解。由此可导出扰动向量

$$y(t) := x - x_e$$

满足微分方程

$$\frac{d}{dt}y = \frac{d}{dt}(x - x_e) = f(x, t) = f(y + x_e, t) := G(y, t)$$

称为关于平衡状态x_e的扰动方程，即

$$\dot{y} = G(y, t)$$

其中，$G(0, t) = f(x_e, t) \equiv 0$

因此，在下面总假定微分方程

$$\dot{x} = \mathbf{F}(x, t) \qquad (7\text{-}1)$$

满足

$$\mathbf{F}(0,\ t)=0 \qquad (7\text{-}2)$$

其中x为 n 维向量，$\mathbf{F}(x,\ t)$为 n 维的函数向量。这时方程（7-1）有解$x=0$ (满足$x(t_0)= 0$) ，称为（7-1）的显然解或零解。

在以下讨论平衡状态的稳定性时，只需要讨论**零解**这个平衡状态的稳定性就可以了。

3. Lyapunov稳定性的定义

设有一个初始扰动，使系统的状态偏离了平衡状态$x=0$。若初始扰动为$x(t_0)=x_0$，显然在这个初始扰动作用下，方程（7-1）所决定的运动是下列初值问题

$$\dot{x} = \mathbf{F}(x,t) \qquad x(t_0) = x_0$$

的解。将这个解表示为 $x(t) = x(t,t_0,x_0)$。

例： 考虑微分方程

$$\dot{x} = 4x$$

显然，$x_e = 0$是它的一个平衡状态。现若有初始扰动

$$x(0)=0.001,$$

则其解为

$$x = 0.001e^{4t}, t \geq 0$$

可见，即使初始值微小地偏离了平衡状态，且在任意有限的时间内其解有界，但最终将发散。

例： 考虑微分方程

$$\dot{x} = -4x$$

显然$x_e = 0$是它的一个平衡状态。现若有初始扰动

$$x(0) = 100$$

则其解为 $x = 100e^{-4t}, t \geq 0$

事实上，无论初始扰动多么大，最终将收敛到平衡状态。

根据微分方程解对初值的连续依赖性质，可知只要x_0充分小，对于$[t_0,T]$ 之间的任一时刻，$x(t,t_0,x_0)$偏离$x=0$（**平衡状态**）也可以任意小。现在要研究这一性质是否对$[t_0,+\infty)$均成立。

定义7-1 对于任意的$\varepsilon>0$，都存在$\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使得当$\|x(t_0)\| < \delta(t_0,\varepsilon)$时有

$\|x(t_0)-0\|$

$\|x(t,t_0,x_0)-0\| < \varepsilon$

$$\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon \qquad \forall t \geq t_0$$

成立。则称系统关于平衡状态（或原点） $x=0$ 是（ Lyapunov意义下）稳定的。

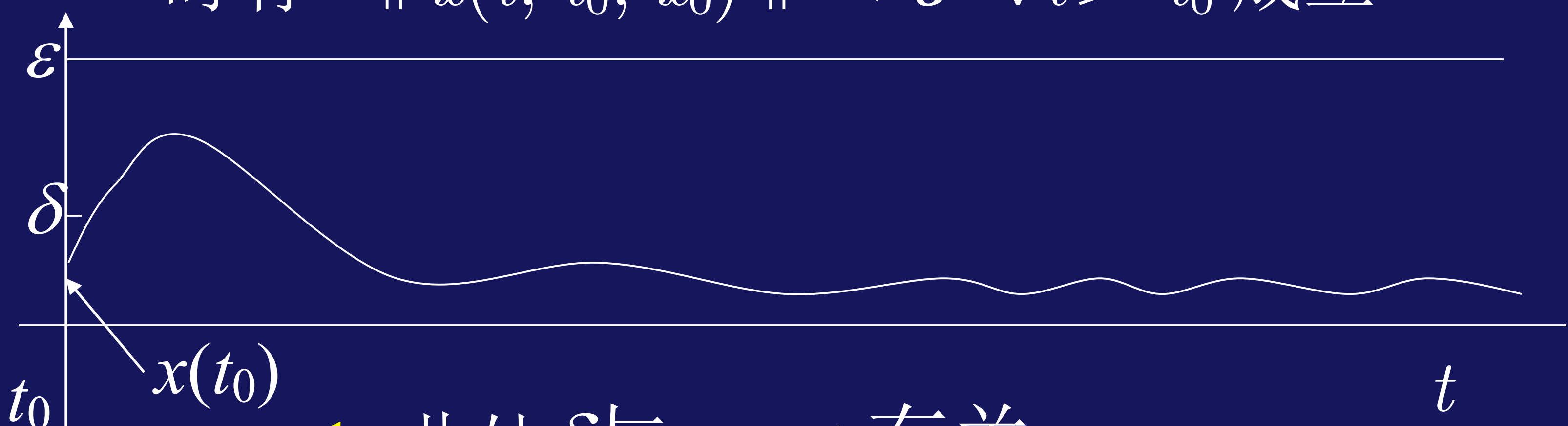
定义7-2 若定义7-1中的$\delta=\delta(\varepsilon)$ ，即δ 与 t_0无关(关于t_0 一致)，则称所定义的稳定为一致稳定。

定义7-1（Lyapunov意义下稳定）的图示：

对于任意的$\varepsilon>0$，都存在$\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使得当

$$\| x(t_0) \| < \delta\,(t_0,\varepsilon)$$

时有 $\| x(t,\ t_0,\ x_0) \| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$ 成立



1. 此处δ与ε、t_0有关；

2. $\| x(t,\ t_0,\ x_0) \| < \varepsilon \qquad \forall t \geq t_0$

初值变化充分小时，解的变化($t \geq t_0$)可任意小(不是无变化)；3.显然，$\delta\,(t_0,\varepsilon) \leq \varepsilon$。

例： 讨论下列系统的稳定性和一致稳定性：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

其解为：

$$x_1(t) = e^{-(t-t_0)} x_1(t_0) + (1 - e^{-(t-t_0)}) x_2(t_0)$$

$$x_2(t) = x_2(t_0), \forall t \geq t_0$$

显然

$$\|x(t)\|_1$$

$$= |x_1(t)| + |x_2(t)| = \left| e^{-(t-t_0)} x_1(t_0) + [1 - e^{-(t-t_0)}] x_2(t_0) \right| + |x_2(t_0)|$$

$$\leq |x_1(t_0)| + 2|x_2(t_0)|, \quad \forall t \geq t_0$$

故任给$\varepsilon > 0$,取$\delta = \varepsilon / 2$(与t_0无关)，只要$|x_1(t_0)|$、$|x_2(t_0)|$满足

$$\|x_0\|_1 \le \delta, \text{则} \|x_0\|_1 \le |x_1(t_0)| + 2|x_2(t_0)| < 2\delta = \varepsilon,$$

就有

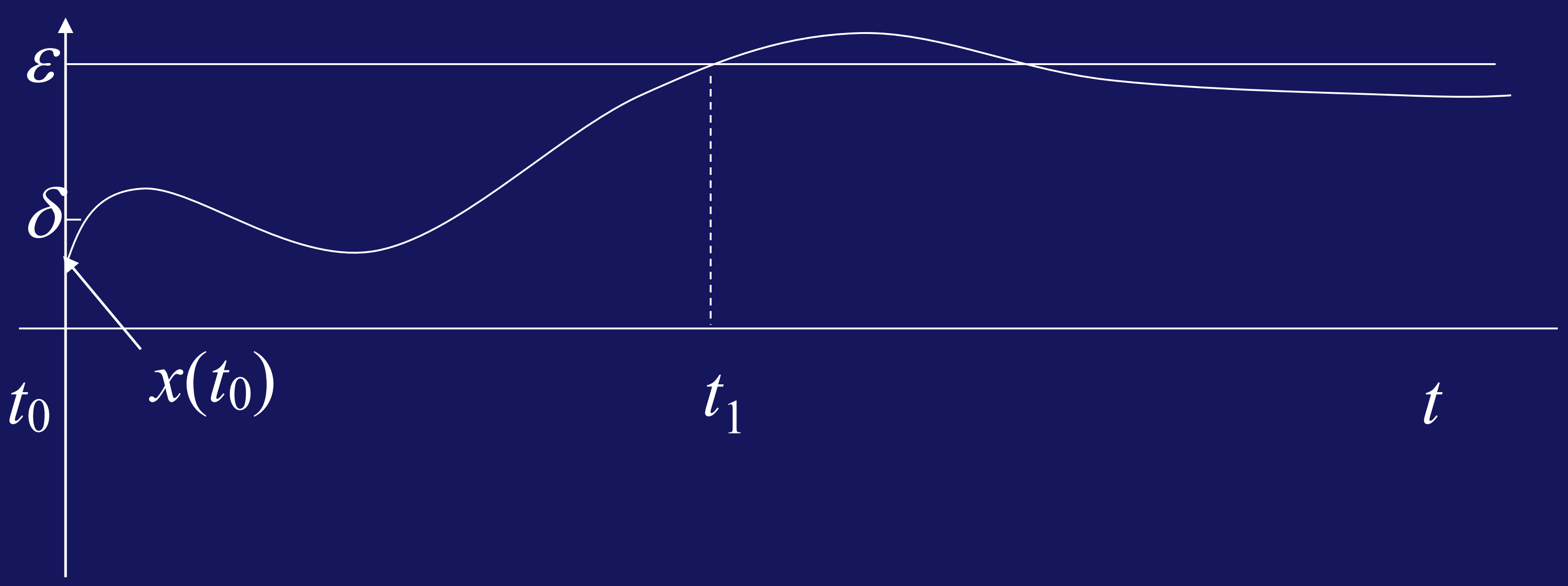
$$\|x\|_1 = |x_1(t)| + |x_2(t)| \le \left| e^{-(t-t_0)} x_1(t_0) + [1 - e^{-(t-t_0)}] x_2(t_0) \right| + |x_2(t_0)|$$

$$\le |x_1(t_0)| + 2|x_2(t_0)| < \varepsilon, \quad \forall t \ge t_0$$

故系统是**Lyapunov**稳定的。又由于$\delta = \varepsilon / 2$，即与t_0无关，系统还是一致稳定的。

关于不稳定的定义：

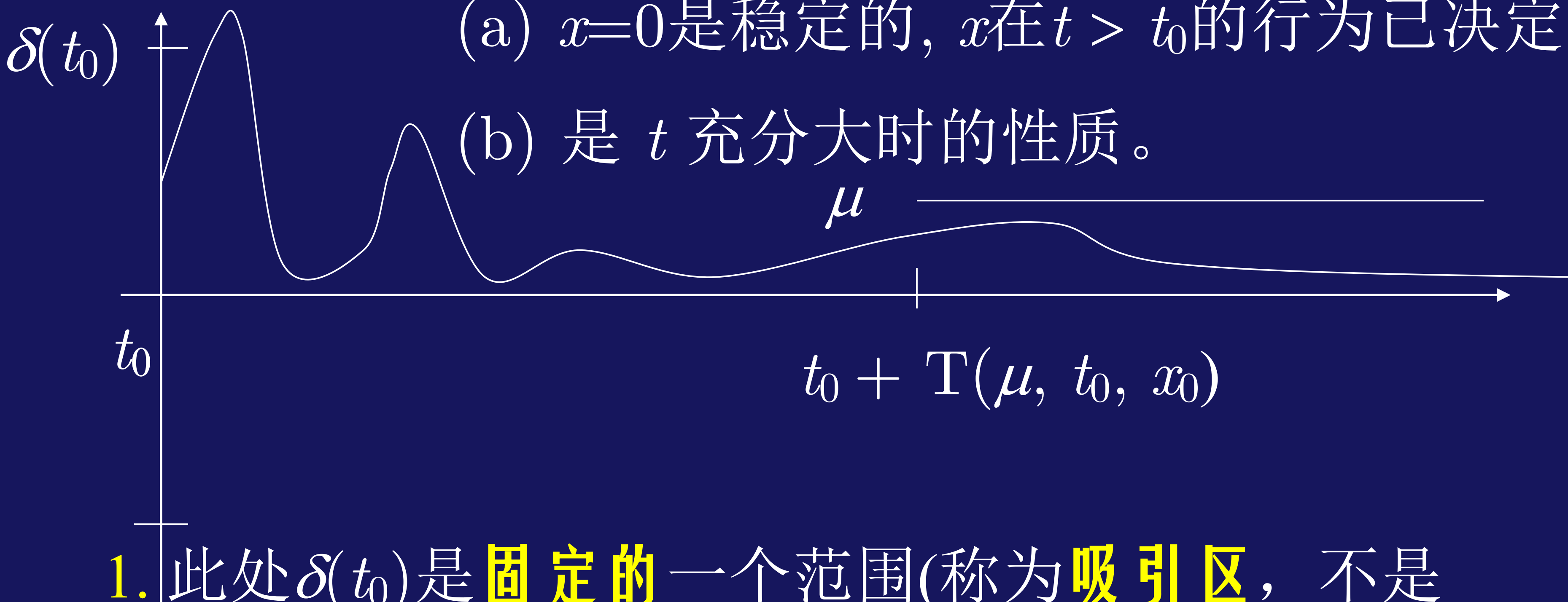
定义： 若对任意给定的$\varepsilon>0$，无论δ多么小，总可以找到满足 $\| x(t_0) \| < \delta$ 的某一初值x_0，使得从它出发的运动轨线 $x(t, t_0, x_0)$ 在某一时刻$t_1>t_0$，有 $\| x(t, t_0, x_0) \| = \varepsilon$，则称系统(7-1)的零解是不稳定的。



定义7-3 若 (a) $x=0$是稳定的。(b)存在$\delta(t_0)>0$，使得对任意的$\mu>0$，存在$\mathrm{T}(\mu,\ t_0,\ x_0)$，当$\|x(t_0)\|<\delta(t_0)$，$t>t_0+\mathrm{T}(\mu,\ t_0,\ x_0)$时，有$\|x(t,\ t_0,\ x_0)\|<\mu$。则称$x=0$为渐近稳定。

(a) $x=0$是稳定的, x在$t>t_0$的行为已决定

(b) 是 t 充分大时的性质。



1. 此处$\delta(t_0)$是**固定的**一个范围(称为**吸引区**，不是任意小的；T 称为吸引时间或衰减时间)；

2. $\|x(t,\ t_0,\ x_0)\|<\mu$，$t>t_0+\mathrm{T}(\mu,\ t_0,\ x_0)$

讨论：

1) 定义7-3的第二部分(b)又称为**关于零解是吸引的**。它反映的是解的渐近性质。可以将(b)改成：

$\exists\delta(t_0)>0$，使得 $\| x(t_0) \| < \delta(t_0)$ 蕴涵

$$\lim_{t\to\infty} x(t,t_0,x_0) = 0$$

2) 稳定和吸引（即(a)和(b)）是相互独立的概念，对于一般的系统，它们之间不存在蕴涵关系。苏联人给出了一个著名的反例 (参见黄琳教授的"稳定性理论"，或"稳定性与鲁棒性理论基础"），表明一个微分方程的解是吸引的但却不是关于零解稳定的。

3) 正数$\delta(t_0)$ 确定的区域称为系统渐近稳定的吸引区。若吸引区是整个空间，称系统是**关于原点全局渐近稳定的。**

定义7-4 若

a) x=0是一致稳定的。

b) 存在δ_0>0，使得对任意的$\mu>0$ ，存在T(μ) ，当‖$x(t_0)$ ‖< δ_0 ，t > t_0 + T(μ)时有‖$x(t, t_0, x_0)$ ‖< μ 。则称x=0为一致渐近稳定，即

$$x(t,t_0,x_0)\xrightarrow{\text{关于}t_0\text{、}x_0\text{均一致}}0$$

这里，一致性在于：δ_0 不依赖于t_0、且T仅依赖于μ，不依赖于t_0 、x_0。

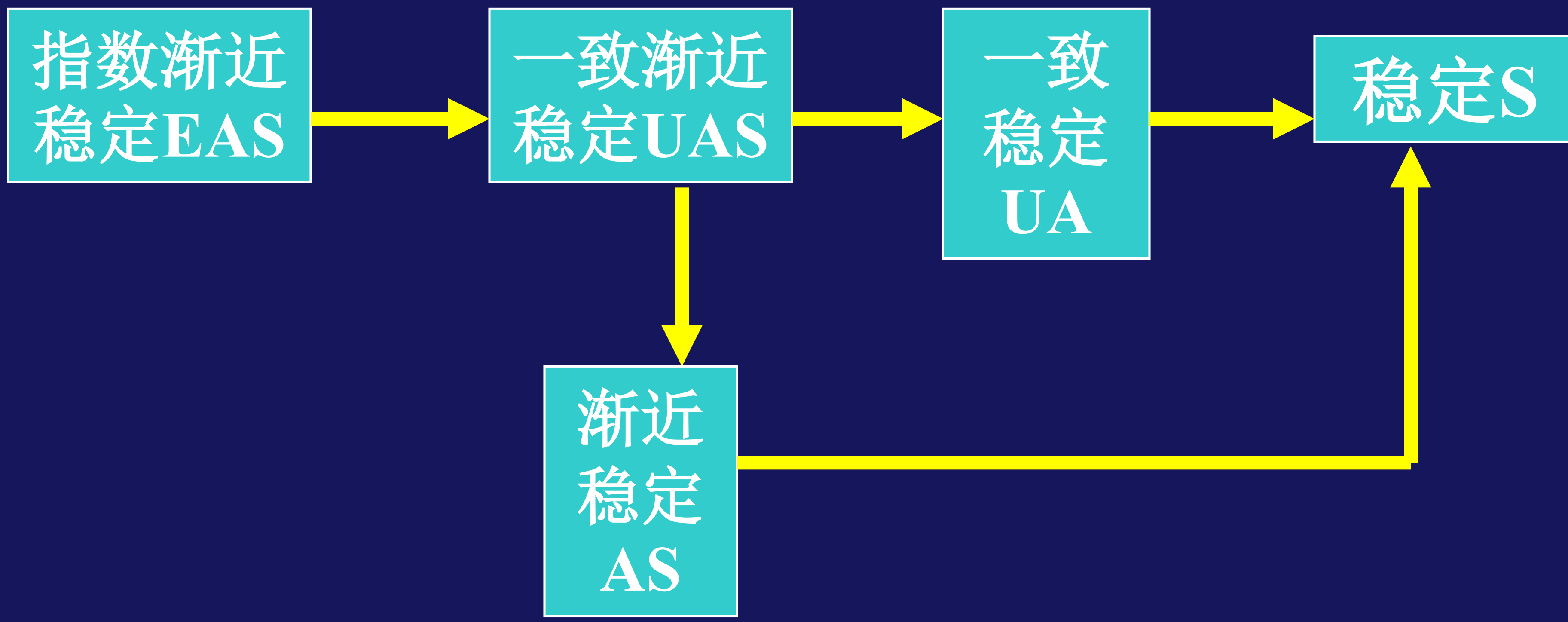
定义7-5 若存在$\nu>0$，对任意的$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$，使得当$\|x(t_0)\|<\delta(\varepsilon)$，就有

$$\|x(t,t_0,x_0)\|<\varepsilon e^{-\nu(t-t_0)} \qquad \forall t\geqslant t_0$$

成立。则称$x=0$是按指数渐近稳定的。

显然，以上定义关于t_0、x_0是一致的。

这里所定义的稳定、一致稳定、渐近稳定、一致渐近稳定和按指数渐近稳定都是**局部**的概念，即定义中的条件只要在$x=0$的附近成立即可。但在工程技术上，特别是在控制系统中，所发生的初始偏差并非任意的小，而是有限的或是任意大的。幸好，就我们所讨论的线性系统而言，全局和局部是一致的。



各种稳定性之间的蕴涵关系

例：讨论下列系统零解是否稳定、是否一致稳定、是否渐近稳定：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

解：利用拉氏变换立即可得$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$，进而得到

$$x_1^2(t) + x_2^2(t) = x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0)$$

显然，任给$\varepsilon > 0$，只要取δ=ε，则当$\sqrt{x_1^2(t_0) + x_2^2(t_0)} < \delta$，就有$\sqrt{x_1^2(t) + x_2^2(t)} < \varepsilon$。故系统是李氏稳定的。又$\delta$与$t_0$

无关，故系统还是一致稳定的。但

$$\lim_{t\to\infty}\|x(t)\| = \sqrt{x_1^2(t)+x_2^2(t)} = \sqrt{x_1^2(t_0)+x_2^2(t_0)} \neq 0$$

故系统不是渐近稳定的。这里，取$\|\cdot\|$为向量$2-$范数。

例： 讨论下列系统零解是否一致稳定、是否渐近稳定、是否一致渐近稳定：

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t+1}$$

解： 容易解出：

$$x(t,t_0,x_0) = \frac{t_0+1}{t+1}x_0$$

任给$\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$，则对所有$t\geq t_0$，只要$|x_0|<\delta$，

就有$|x(t,t_0,x_0)|\leq|x_0|<\varepsilon$，故其零解一致稳定。又

$$\lim_{t\to+\infty} x(t,t_0,x_0) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t_0+1}{t+1} x_0 = 0,$$

故零解渐近稳定。

另一方面，当$|x_0| \le 1$时，欲使对一切$t > t_0$+T，有

$$|x(t,t_0,x_0)| = \left| x_0 \frac{t_0+1}{t+1} \right| = |x_0| \frac{t_0+1}{t+1} < \varepsilon$$

必须

$$T > (t_0+1)\frac{1}{\varepsilon} - 1$$

T与t_0有关，故系统的零解不是一致渐近稳定的。

还可以举出许多例子，可参看廖晓昕“**稳定性的数学理论及应用**”

二、运动的稳定性

前面讨论了动态系统的一种特殊的运动——**平衡状态的稳定性**，现在来讨论系统

$$\dot{x} = \mathbf{F}(x,t) \qquad (7\text{-}1)$$

任一运动的稳定性问题。我们已经知道，每一个初始状态$x(t_0)=x_0$确定唯一的解

$$x(t,t_0,x_0)$$

一个系统随着初始条件不同可以有很多不同的运动。现在，设我们关心(7-1)的某一个运动：

$$x_1(t,t_0,x_{10}), \quad x_1(t_0)=x_{10}$$

我们欲研究这个运动的稳定性。我们称这个运动为**给定运动**，或**未被扰运动**。

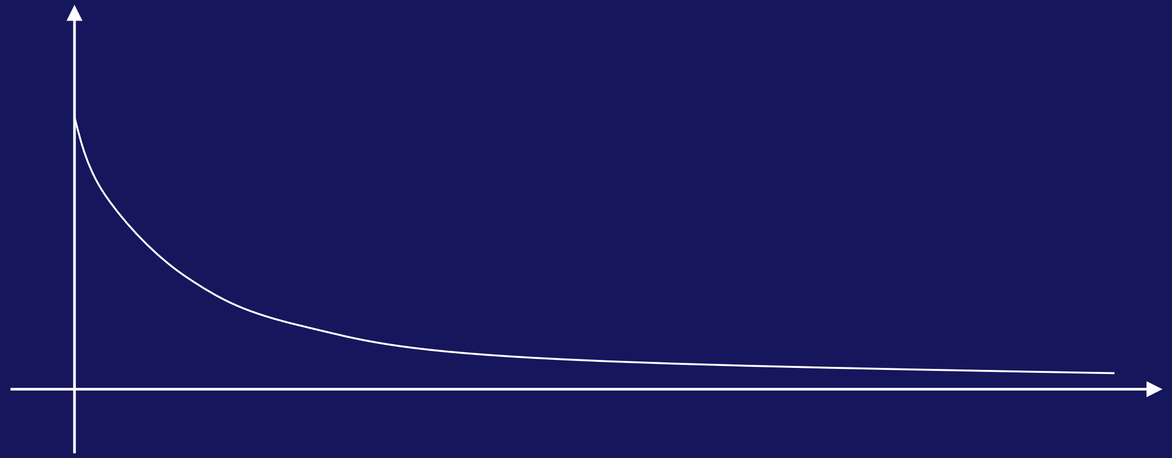
例1：考虑微分方程

$$\dot{x} = -4x, \quad t \geq t_0 \geq 0$$

设我们关心初始状态x_{10}=0.5时候的运动：

$$x_1(t) = 0.5e^{-4t}$$

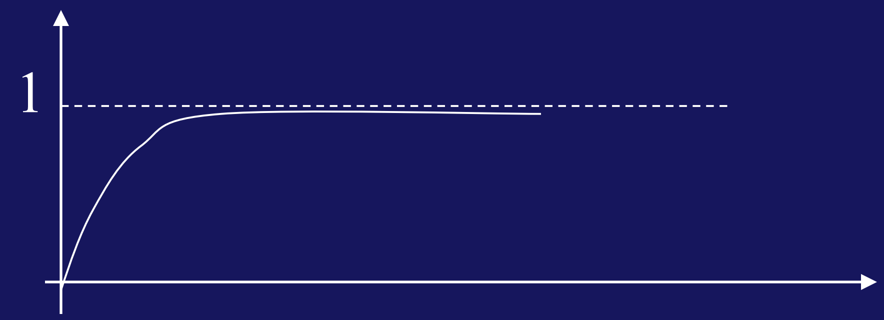
我们可称其为**给定运动或未被扰运动**。而相对于这个给定运动，由其它初始条件引起的运动均称为（相对于给定运动的）**扰动运动**。



例2: 考虑系统:

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t), \quad u = 1(t), t \geq 0$$

设**给定运动**为$x(0)=0$时的系统响应:



则所有非零初始条件$x(0)\neq 0$时的系统响应均为（**相应于给定运动的**）扰动运动。显然，给定运动可视为前面讨论的“零解”。

进而，设于初始时刻t_0，系统受到干扰，状态由

x_{10} 变成 $x_{10}+y_0$

从这一初始状态出发的运动，即初值问题

$$\dot{x}(t)=\mathbf{F}(x,t),\quad x(t_0)=x_{10}+y_0$$

的解，称为**被扰运动**。类比于平衡状态的稳定性（Lyapunov稳定、一致稳定、渐近稳定等等），也可以相应地定义**相对于给定运动的稳定性**（ Lyapunov稳定、一致稳定、渐近稳定等等）。

定义 对于任意的$\varepsilon>0$，都存在$\delta(t_0,\varepsilon)>0$，使得当$\| x(t_0)-x_1(t_0) \| < \delta(t_0, \varepsilon)$时有

$$\| x(t,\ t_0,\ x_0) - x_1(t,\ t_0,\ x_{10}) \| < \varepsilon \qquad \forall t \geqslant t_0$$

成立。则称系统关于给定运动

$$x_1(t,\ t_0,\ x_{10})$$

是（Lyapunov意义下）稳定的。

关于给定运动的稳定性可以变换成关于零解的稳定性问题。

为此，考虑变换$y = x - x_1$，则扰动方程定义为：

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_1(t) = \mathbf{F}(x(t), t) - \mathbf{F}(x_1(t), t)$$
$$= \mathbf{F}(y + x_1(t), t) - \mathbf{F}(x_1(t), t) := G(y, t) \qquad (7-3)$$

易见

$$G(0, t) \equiv 0$$

这说明，通过上述变换可以将给定运动（或称为未被扰运动）的稳定性问题化为扰动系统(7-3)的零解稳定性问题。也就是说，今后讨论运动的稳定性时，可先列出其扰动方程，然后讨论扰动方程(7-3)零解的稳定性就可以了。

三、线性系统稳定性的特点

考虑 $\dot{x} = \mathbf{A}(t)x + \mathbf{B}(t)u$ (7-4)

其对应的齐次方程为：

$$\dot{x} = \mathbf{A}(t)x \qquad (s-1)$$

（7-4）式比一般的方程（7-1）式的结构要简单，因此它在稳定性方面有更多的简单特性。

定理7-1 对于方程(7-4) 所表示的线性系统，若有一个运动稳定，则其所有运动稳定。

证明：

1) 设(7-4)的一个运动$x_1(t)$是稳定的，即对任给 的$\varepsilon>0$，使得对满足(7-4)的任一运动$x(t)$，只要$\| x(t_0) - x_1(t_0) \| < \delta(t_0, \varepsilon)$，就有

$$\| x(t) - x_1(t) \| < \varepsilon \ , \quad \forall t \geq t_0 \qquad \text{(A-1)}$$

成立。另一方面，

令 $x_0(t) = x(t) - x_1(t)$，则

$$\dot{x}_0(t) = \dot{x}(t) - \dot{x}_1(t)$$
$$= \mathbf{A}(t)x + \mathbf{B}(t)u - (\mathbf{A}(t)x_1 + \mathbf{B}(t)u) = \mathbf{A}(t)(x(t) - x_1(t))$$

则上式（扰动方程）等价于

$$\dot{x}_0(t) = \mathbf{A}(t)x_0(t) \qquad (A-2)$$

于是，根据上述$\varepsilon-\delta$的语言，关于运动x_1的稳定性等价于扰动方程

$$\dot{x}_0(t) = \mathbf{A}(t)x_0(t)$$

零解的稳定性：

$$\| x_0(t_0) \| < \delta(t_0, \varepsilon) \Leftrightarrow \| x(t_0) - x_1(t_0) \| < \delta(t_0, \varepsilon),$$

$$\| x_0(t) \| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \| x(t) - x_1(t) \| < \varepsilon \quad , \quad \forall t \geqslant t_0$$

2) 现在，设$y_1(t)$为(7-4)的另一个运动，$y(t)$为(7-4)的任一运动。由于

$$\Leftrightarrow (\dot{y}(t)-\dot{y}_1(t)) = \mathbf{A}(t)(y(t)-y_1(t))$$

$$\Leftrightarrow \dot{\tilde{x}} = \mathbf{A}(t)\tilde{x} \qquad (A-3)$$

则当 $\| y(t_0)-y_1(t_0) \| < \delta(t_0, \varepsilon)$，必有

$$\| y(t_0)-y_1(t_0) \| < \varepsilon \;, \quad \forall t \geqslant t_0$$

成立。这里， δ 只要选择得与(A-1)式相同就可以了，

$$\tilde{x} := y(t)-y_1(t)$$

比较式（A-2) 和（A-3)，它们显然有相同的形式，故具有同一稳定性。 **证完。**

线性系统的一个特性：线性系统的任意解（运动）的扰动方程都相同，即为其齐次方程，因此线性系统任意解稳定性与其齐次方程原点稳定性一致。因此，对线性系统而言，可笼统地说“系统是稳定的”，而一般的非线性系统并不具备这一特性。

结　　论

从上面的分析可以看出，讨论线性系统

$$\dot{x} = \mathbf{A}(t)x + \mathbf{B}(t)u \qquad (B.1)$$

在任意初始条件和 u 作用下任一实际运动的稳定性，等价于讨论其所对应的齐次方程

$$\dot{x} = \mathbf{A}(t)x \qquad (B.2)$$

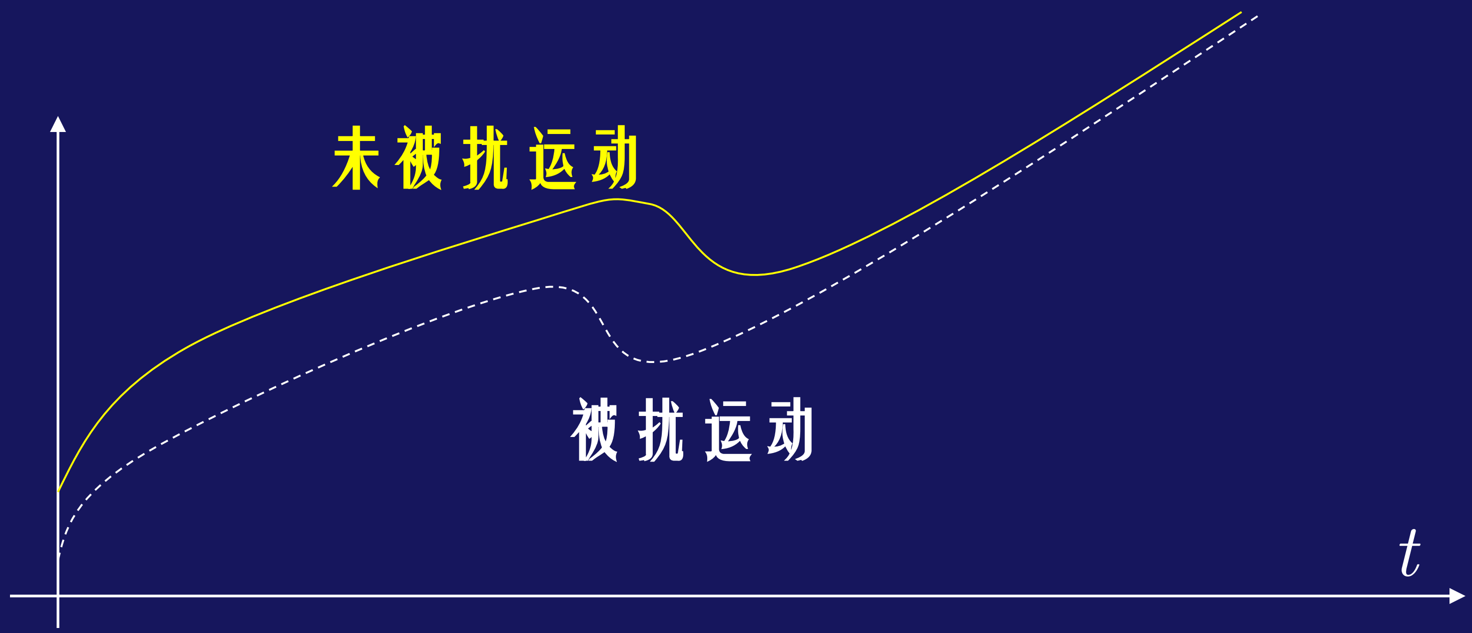
关于零解的稳定性。

例：讨论如下系统的稳定性：

$$\dot{x} = -5x + t, \quad t \ge 0, x(0) := x_0$$

根据上面的分析，只需要讨论所对应的齐次方程的零解稳定性即可。齐次方程渐近稳定，故原系统渐近稳定。

但是，系统的响应是无界的。这是由于输入信号是无界的。这和系统的稳定性不是同一个概念。



四、时不变线性系统 $\dot{x} = \mathrm{A}x$ 的稳定性判据

n 维时不变系统的方程为

$$\dot{x} = \mathbf{A}x \qquad (7\text{-}10)$$

$$x = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}x_0, \quad x(t_0) := x_0$$

不失一般性，可取$t_0 = 0$:

$$x(t) = e^{\mathbf{A}t}x(0)$$

特征方程为

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \qquad （7-11）$$

系统(7-10)的稳定性完全可由特征方程式(7-11)的根及其相应的模式来决定。

1. 运动模式及其收敛、发散、有界的条件

(7-10) 式中**A**阵的特征值称为**模态**，n_i 重特征值 λ 对应的运动形式可能有$e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$,…, $t^{n_i-1}e^{\lambda t}$ ，均称为系统的运动模式。但这些模式并非全部都出现，究竟出现多少项取决于λ 的几何结构。例如下面不同的若当形结构对应有不同的运动模式：

例题A-1

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}\lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda\end{bmatrix} \Rightarrow e^{\mathbf{A}_1 t}=\begin{bmatrix}e^{\lambda t} & & \\ & e^{\lambda t} & \\ & & e^{\lambda t}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{\mathbf{A}_2 t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \\ & e^{\lambda t} & \\ & & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad e^{\mathbf{A}_3 t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \frac{1}{2}t^2 e^{\lambda t} \\ & e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ & & e^{\lambda t} \end{bmatrix}$$

尽管三者均具有相同的特征值且代数重数相等，但却有不同的几何重数：他们分别为3、2、1。

注：

1) **代数重数 n_i：** 特征式中仅有的因子

$$(s-\lambda_i)^{n_i}$$

2) **几何重数 $\overline{n}_i$：** λ_i对应的线性无关的特征向量的个数，**即属于λ_i的若当块的块数**。几何重数$\overline{n}_i$可以如下求出：

$$\overline{n}_i = n - rank(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A})$$

例：若λ_i为6阶系统的三重根，且由计算得到

$$\overline{n}_i = 6 - rank(\lambda_i \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 6 - 3 = 3$$

则表明λ_i有三个线性无关的特征向量。

以下几种提法是等价：对特征值λ_i

(a) λ_i 是最小多项式的单根;

(b) λ_i 的初等因子都是一次的;

(c) 对应的 $\mathbf{J}_i$ 是对角形;

(d) 对应的若当块的个数等于代数重数;

(e) 几何重数等于代数重数.

可以得出的结论是：

1) Re $\lambda < 0$， λ 对应的所有运动模式收敛，即随着时间趋于无穷而趋于零。

2) Re $\lambda >0$, λ 对应的所有运动模式发散，即随着时间趋于无穷而趋于无穷，并且是按指数规律发散.。

3) Re $\lambda =0$, 分两种情况：

- 若 λ 对应的若当块全是一阶子块，这时λ 的代数重数与几何重数一致，不会发生发散现象，运动模式也不收敛，运动模式是**有界的**；

- 当λ 的几何重数小于代数重数，λ 对应的若当块一定有二阶或二阶以上的出现，这时**运动模式发散，且按时间的幂函数的规律发散**。因此当零实部重根出现时,一定要研究它的几何重数后，才可对运动模式的形态作出结论。

只要将例题A1中的特征值λ换为零，就可证实以上结论：

$$A_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\rightarrow\quad e^{A_1 t}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad e^{A_2 t} = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad e^{A_3 t} = \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 稳定性判据

定理7-2： 系统$dx/dt = \mathbf{A}x$的稳定性有以下充分必要条件

1) **(李氏)稳定：** $\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$实部为零的根对应的初等因子是一次(或对应的若当块为一阶标准若当块，或是最小多项式的单根、几何重数等于代数重数。)，且其余根均具负实部。

2) **渐近稳定：** $\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$的所有根均具负实部。

3) **不稳定：** $\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$有正实部的根或实部为零的根对应的初等因子不是一次。

例题　系统方程如下

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -a & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

式中a为实常数，写出x=0李氏稳定时a的取值条件。

解　系统的特征方程式为

$$\begin{vmatrix} s+a & 7 & 4 \\ 0 & s & -1 \\ -1 & 0 & s \end{vmatrix} = s^3 + as^2 + 4s + 7$$

由Routh或Hurwitz判据易知

$a > \frac{7}{4}$ 三根在左半平面；

$a < \frac{7}{4}$ 有正实部根 ；

$a = \frac{7}{4}$ 有一根为$-7/4$，另两根为 $-2j$、$+2j$

所以 $a \geq \frac{7}{4}$ 李氏稳定。

五、线性系统的稳定性判据

由于线性动态方程的稳定性等价于其对应的齐次方程的零解的稳定性，故这里只讨论齐次方程

$$\dot{x} = \mathrm{A}(t)x \qquad (7-5)$$

对于（7-5）零解的稳定性问题。由于$\mathbf{A}(t)$不是常量矩阵，因此一般不能用特征值来讨论系统运动的性质，而应该用与系统运动关系密切的状态转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 。

例7-2 齐次方程如下

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & e^{2t}\\ 0 & -1\end{bmatrix}x$$

A的特征值为 -1， -1，而其基本解矩阵为

$$\Psi(t)=\begin{bmatrix}e^{-t} & \frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}$$

其一般的解为

$$x(t)=\begin{bmatrix}e^{-t} & \frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t_0} & \frac{1}{2}(e^{t_0}-e^{-t_0})\\ 0 & e^{-t_0}\end{bmatrix}^{-1}x(t_0)$$

零初始时刻的解为 $x(t)=\begin{bmatrix}e^{-t} & \frac{1}{2}(e^{t}-e^{-t})\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}x(0)$

当$t\rightarrow\infty$时，只要 $x_2(0)\neq 0$ ，就有 $\|x(t)\|$ 趋于无穷，故零解不稳定。因此，简单地由特征值来判断将导致错误的结论。

例7-3 齐次方程如下

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ e^{2t} & -2 \end{bmatrix} x$$

A的特征值为 -1， -2 ，而其基本解矩阵为

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ \frac{1}{3}(e^{t} - e^{-2t}) & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

其一般解为

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ \frac{1}{3}(e^{t+t_0} - e^{-(2t-4t_0)}) & e^{-2(t-t_0)} \end{bmatrix} x(t_0)$$

当$t \to \infty$时，只要 $x_1(t_0) \neq 0$ ，就有 $\| x(t) \|$ 趋于无穷，故零解不稳定。因此，简单地由特征值来判断将导致错误的结论。

定理7-4 设$\mathbf{A}(t)$是连续（或分段连续）的函数矩阵，则有以下充分必要条件成立：

1) $\dot{x}=\mathbf{A}(t)x$ 稳定$\Leftrightarrow$存在某常数$N(t_0)$，使得对于任意的t_0和$t\geqslant t_0$有

$$\|\ \Phi(t,t_0)\ \|\leqslant N(t_0) \qquad （7\text{-}6）$$

2) （7-5）一致稳定$\Leftrightarrow$ 1)中的$N(t_0)$与 t_0 无关。

3) （7-5)渐近稳定 $\Leftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty}\|\Phi(t,t_0)\|=0\ (7-7)$

4) （7-5）一致渐近稳定$\Leftrightarrow$存在N、C >0，使得对于任意的t_0和$t\geqslant t_0$有

$$\|\Phi(t,t_0)\|\leq Ne^{-C(t-t_0)}$$

定理7-4表明：对线性系统

1. Lyapunov稳定等价于状态转移矩阵范数的有界性；
2. 一致稳定等价于状态转移矩阵范数 $\|\Phi(t,t_0)\|$ 的一致有界性；
3. 渐近稳定等价于状态转移矩阵范数 $\|\Phi(t,t_0)\|$ 趋向于零；
4. **一致渐近稳定等价于状态转移矩阵按指数规律稳定。**

注：

1）定理7-4所给出的线性系统的重要性质，完全是由

$$x(t,x_0,t_0)=\Phi(t,t_0)x_0$$

中，$x(t,x_0,t_0)$对x_0的线性关系所致。状态转移阵$\Phi(t,t_0)$决定了解的性质。一般地，对于非线性系统，定理7-4的结论均不成立。

2）线性系统的稳定性具有全局性质。

定义 对任意的$x(t_0)$，均有$x(t)$有界,则称 $\dot{x}=\mathbf{A}(t)x$的零解是Lyapunov意义下全局稳定的。

定义： 系统 $\dot{x}=\mathbf{F}(x,t)$ 的零解称为是全局（一致）渐近稳定的，若其零解是（一致）渐近稳定的且无论初始扰动多大，均有

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0$$

例： 系统

$$\dot{x}=-4x$$

是全局渐近稳定的。

定理7-4之(3)、(4)清楚地表明， 对于线性系统 $\dot{x}=\mathbf{A}(t)x$ 而言，若其零解是（一致)渐近稳定的，那么由状态空间任一点为初始点的运动轨线都要收敛到原点，**即原点的渐定稳定的吸引区遍及整个状态空间**，这就是上面定义所述的全局（一致）渐近稳定性。

3) 对于线性系统而言，零解的吸引性蕴涵其稳定性，而一般的非线性系统则不具备这一性质。例如：参见黄琳教授的“稳定性理论”，或“稳定性与鲁棒性理论基础”，下面的微分方程的解是吸引的但却不是关于零解稳定的。

$$
\begin{cases}
\dot{\xi} = \varphi_1(\xi, \eta) = \dfrac{\xi^2(\eta - \xi) + \eta^5}{(\xi^2 + \eta^2)[1 + (\xi^2 + \eta^2)^2]} \\[2ex]
\dot{\eta} = \varphi_2(\xi, \eta) = \dfrac{\eta^2(\eta - 2\xi)}{(\xi^2 + \eta^2)[1 + (\xi^2 + \eta^2)^2]}
\end{cases}
$$

定理7－4的证明：

1) $dx/dt=\mathbf{A}(t)x(t)$稳定$\Leftrightarrow$存在某常数$N(t_0)$，使得对于任意的t_0和$t\geqslant t_0$有

$$\|\Phi(t,t_0)\|\leqslant N(t_0) \qquad （7\text{-}6）$$

充分性。考虑到

$$\|x(t,t_0,x_0)\|\le\|\Phi(t,t_0)\|\|x(t_0)\|$$

若 $$\|\Phi(t,t_0)\|\le N(t_0)\forall t\ge t_0$$

则 $$\|x(t,t_0,x_0)\|\le\|\Phi(t,t_0)\|\|x(t_0)\|\le N(t_0)\|x(t_0)\|$$

故对任意给定的$\varepsilon>0$,只要取

$$\delta(t_0,\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{N(t_0)}$$

那么，当$\|x(t_0)\|<\delta(t_0,\varepsilon)$时，就有

$$\|x(t,t_0,x_0)\|\le\|\Phi(t,t_0)\|\|x(t_0)\|$$

$$<N(t_0)\delta=N(t_0)\frac{\varepsilon}{N(t_0)}=\varepsilon$$

必要性。因为零解$x=0$稳定，故对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta(t_0,\varepsilon)>0$，只要 $\|x(t_0)\|<\delta$，就有

$$\|\Phi(t,t_0)x_0\|<\varepsilon \qquad t\geqslant t_0$$

今取

$$x_0 = (0\cdots\cdots 0 \underset{j}{\frac{\delta}{2}} 0\cdots\cdots)^{\mathrm{T}}, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

显然， $\| x_0 \| \le \delta/2 < \delta$，且 $\Phi(t,t_0)$的第 j 列是

$$\Phi_j(t,t_0) = \frac{2}{\delta}\Phi(t,t_0)x_0$$

故 $$\|\Phi_j(t_1,t_0)\| = \left\|\frac{2}{\delta}\Phi(t,t_0)x_0\right\| < \frac{2}{\delta}\varepsilon := C(t_0), \quad \forall t \ge t_0$$

有界。依此可证明所有列，从而$\Phi(t,t_0)$有界。**证完。**

2) $dx/dt = \mathbf{A}(t)x(t)$ （7-5）一致稳定$\Leftrightarrow$ 1)中的$N(t_0)$与 t_0 无关：

$$\| \Phi(t,t_0) \| \leqslant N \qquad \text{（7-6）}$$

3) （7-5)渐近稳定 $\Leftrightarrow \lim_{t\to\infty}\|\Phi(t,t_0)\| = 0 \; (7-7)$

充分性。因 $\Phi(t,t_0) \to 0 \; (t \to \infty)$

故存在常数$N(t_0)$，使得

$$\| \Phi(t,t_0) \| \leqslant N(t_0) \,, \qquad t \geqslant t_0$$

由本定理命题1），知零解$x=0$稳定。又

$$x(t) = \Phi(t,t_0) x_0$$

由$\Phi(t,t_0) \to 0 \; (t \to \infty)$ 知

$$x(t) = x(t, t_0, x_0) = \Phi(t,t_0) x_0 \to 0 \; (t \to \infty)$$

即零解是吸引的。

必要性。因零解x=0吸引，则存在$\delta(t_0)$，使得只要$\| x(t_0) \| < \delta(t_0)$，就有

$$x(t)=\Phi(t,t_0)x_0 \to 0 \ (t \to \infty)$$

今取 $x_0 = (0 \cdots\cdots 0 \ \underset{j}{\frac{\delta}{2}} \ 0 \cdots\cdots)^{\mathrm{T}}$

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 = \Phi_j(t,t_0)\frac{\delta}{2} \to 0 \Leftrightarrow \Phi_j(t,t_0) \to 0$$

($x(t)$与x_0的线性关系表明$\Phi_j(t,t_0) \to 0$和x_0无关，即线性系统是全局渐近稳定的)

取$j = 1,2,\cdots,n \quad \Rightarrow \Phi(t,t_0) \to 0 \quad (t \to \infty)$

注：该命题表明，对于线性系统，零解的吸引性蕴涵稳定性。

（4）$\dot{x}=\mathbf{A}(t)x$ 一致渐近稳定⇔存在N、C >0，使得对于任意的t_0和$t \geq t_0$有

$$\|\Phi(t,t_0)\| \le Ne^{-C(t-t_0)}$$

充分性: 若条件成立,则

$$\Rightarrow \|x(t,t_0,x_0)\| \le \|\Phi(t,t_0)\|\|x(t_0)\| \le Ne^{-C(t-t_0)}\|x(t_0)\|$$

因此，任给$\varepsilon>0$，对给定的$\delta_0>0$，都存在一与t_0无关

$$T=-\frac{1}{C}\ln\frac{\varepsilon}{N\delta_0},$$

使得只要 $\|x(t_0)\|<\delta_0$，$t-t_0 \ge T \Rightarrow t \ge t_0+T$,

就有

$$\|x(t)\| \le Ne^{-CT}\|x(t_0)\| = Ne^{\ln\frac{\varepsilon}{N\delta_0}}\|x(t_0)\| < N\frac{\varepsilon}{N\delta_0}\delta_0=\varepsilon$$

必要性：设系统一致渐近稳定，要证明

$$\left\|\Phi(t,t_0)\right\| \le Ne^{-C(t-t_0)}, \forall t \ge t_0$$

由于系统一致稳定，故状态转移矩阵对t_0一致有界

$$\left\|\Phi(t,t_0)\right\| \le k, \forall t \ge t_0 \qquad (s\text{–}1)$$

又根据一致渐近稳定的定义，

$$x(t,t_0,x_0) = \Phi(t,t_0)x_0 \to 0$$

对t_0、x_0一致，故

$$\Phi(t,t_0) \to 0$$

也对t_0一致。这样，存在 $T(\varepsilon)>0$,使得

$$\left\|\Phi(t_0+T,t_0)\right\|\le\frac{1}{2}\quad\forall t_0\quad(*)$$

对一切t_0成立。于是

1） $\left\|\Phi(t,t_0)\right\|=\left\|\Phi(t,t_0+T)\Phi(t_0+T,\ t_0)\right\|$

$$\le\underbrace{\left\|\Phi(t,t_0+T)\right\|}_{\le k}\underbrace{\left\|\Phi(t_0+T,\ t_0)\right\|}_{\le\frac{1}{2}}\le\frac{k}{2},\forall t\in[t_0+T,t_0+2T]$$

前者用到了$(s-1)$:

$$\|\Phi(t,t_0+T)\| \le k, \forall t \in [t_0+T, t_0+2T]$$

后者用到了(*):

$$\|\Phi(t_0+T,t_0)\| \le \frac{1}{2} \quad \forall t_0$$

2) 进而，注意到对任意的正整数 n，根据(s-1)式，有

$$\|\Phi(t,t_0+nT)\| \le M \le k, \forall t \in [t_0+nT, t_0+(n+1)T] \quad (s-2)$$

则更一般地，可以得到

$$\left\|\Phi(t_0+nT,t_0)\right\| \le \left\|\Phi(\overbrace{t_0+nT}^{t_{0n}+T},\overbrace{t_0+(n-1)T}^{t_{0n}})\right\| \times$$

$$\times \left\|\Phi(\overbrace{t_0+(n-1)T}^{t_{0(n-1)}+T},\overbrace{t_0+(n-2)T}^{t_{0(n-1)}})\right\| \times \cdots \times \left\|\Phi(\overbrace{t_0+T}^{t_{01}+T},\ \overbrace{t_0}^{t_0:=t_{01}}\ )\right\| \le \frac{1}{2^n}$$

$$(s-3)$$

这里，累次用到了(*)。

于是对 $\forall t \in [t_0+nT, t_0+(n+1)T]$ ，有

$$\left\|\Phi(t,t_0)\right\| = \left\|\Phi(t,t_0+nT)\Phi(t_0+nT,\ t_0)\right\|$$

$$\le \left\|\Phi(t,t_0+nT)\right\|\left\|\Phi(t_0+nT,\ t_0)\right\| \le \frac{k}{2^n}$$

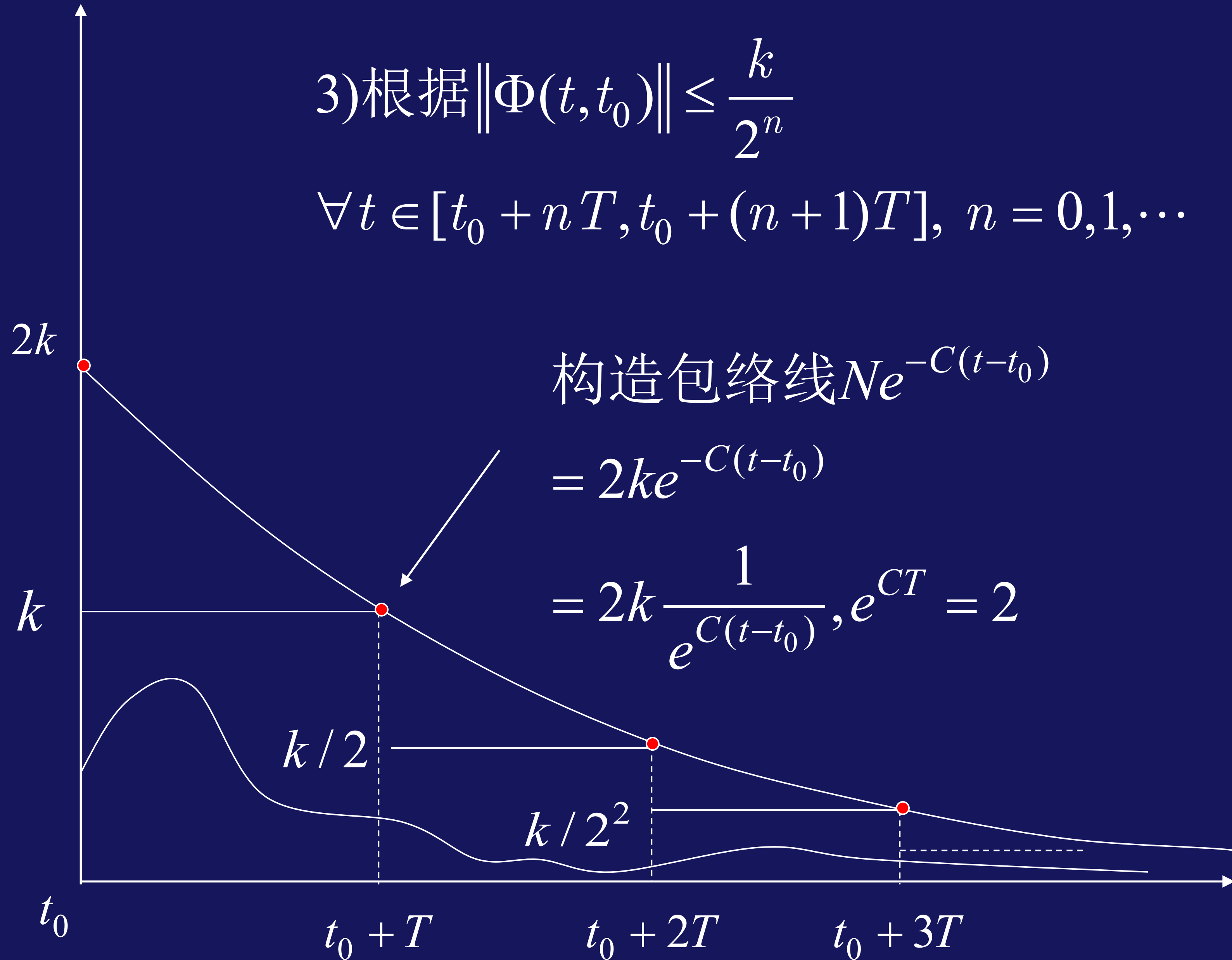
3)根据$\|\Phi(t,t_0)\| \le \frac{k}{2^n}$

$\forall t \in [t_0 + nT, t_0 + (n+1)T],\ n = 0,1,\cdots$

构造包络线$Ne^{-C(t-t_0)}$

$= 2ke^{-C(t-t_0)}$

$= 2k\frac{1}{e^{C(t-t_0)}}, e^{CT} = 2$



以指数衰减函数为界的$\|\Phi(t,t_0)\|$

通过引入正数 N 及 C:

$$N = 2k, e^{CT} = 2$$

则由上图易见:

$$\left\|\Phi(t,t_0)\right\| \le Ne^{-C(t-t_0)}$$

这就证明了系统指数渐近稳定的充要条件。 **证完**

例： 讨论下列系统原点是否一致稳定、是否渐近稳定、是否一致渐近稳定：

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{x}{t+1}$$

解： 解出：

$$x(t, t_0, x_0) = \frac{t_0 + 1}{t+1} x_0$$

根据定理7-4，只要直接对其状态转移矩阵进行讨论就可以了：

$$\Phi(t_0, x_0) = \frac{t_0 + 1}{t+1}$$

讨论：根据定理7-4，

（1）对于时不变系统

稳定⇔一致稳定

这是因为若稳定，则$e^{\mathbf{A}t}$中的每个元素均有界且当$t \ge t_0$时与t_0无关，故

$$\left\|\mathbf{\Phi}(t,t_0)\right\| = \left\|e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\right\| \le N, \forall t \ge t_0$$

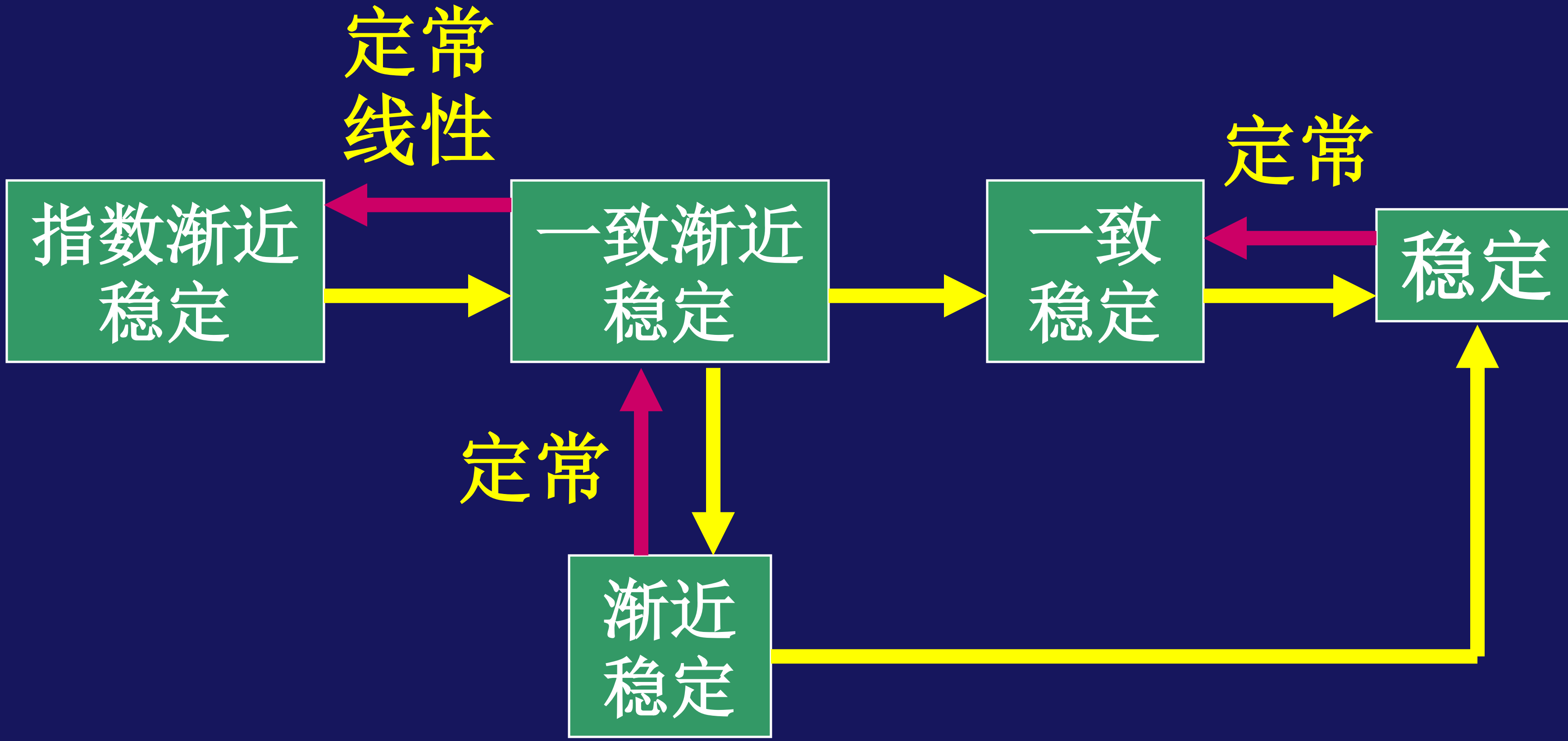
（2）若渐近稳定，总可以将 $\left\|e^{\mathbf{A}\tau}\right\|$ 写成

$$\left\|e^{\mathbf{A}\tau}\right\| \le \alpha e^{-\lambda\tau}, \forall \tau \ge 0, \lambda > 0$$

因此，线性时不变系统按指数渐近稳定、渐近稳定、一致渐近稳定显然也是等价的，即

渐近稳定⇔ 一致渐近稳定⇔指数渐近稳定

线性时不变系统各种稳定性的关系：



作业：P212，7-1，7-2，7-4

线性系统输入状态/输出稳定性及判别

线性时不变系统的稳定性分析

系统方程为

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \qquad y = \mathbf{C}x \qquad (\mathrm{A}-1)$$

$$x(t) = e^{\mathrm{A}t}x(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

$$(\mathrm{A}\text{-}2)$$

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathrm{A}t}x(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

或用复数域表示

$$x(s) = (s\mathrm{I} - \mathbf{A})^{-1}x(0) + (s\mathrm{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s)$$

$$y(s) = \mathbf{C}(s\mathrm{I} - \mathbf{A})^{-1}x(0) + \mathbf{C}(s\mathrm{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s) \qquad (\mathrm{A}-3)$$

$$x(t)=\underbrace{e^{\mathrm{A}t}x(0)}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\int_0^t e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\mathrm{B}u(\tau)d\tau}_{\mathrm{II}}$$

$$y(t)=\underbrace{\mathrm{C}e^{\mathrm{A}t}x(0)}_{\mathrm{III}}+\underbrace{\int_0^t \mathrm{C}e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\mathrm{B}u(\tau)d\tau}_{\mathrm{IV}}$$

可见$x(t)$,$y(t)$由四部分组成。稳定性问题是**A**的特征值问题，但以四项形式出现，与**B**、**C**阵密切相关，这说明对系统采用状态空间描述时,**带来了新的稳定性概念，这些稳定性概念又和系统可控性、可观测性密切相关。**

等价变换对稳定性的影响：如果对动态方程(A-1)

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \qquad y = \mathbf{C}x \qquad (\mathrm{A}-1)$$

进行等价变换,不会改变运动模式的性质，因而也不会改变(A-2)式中四项的有界性，即**等价变换不改变稳定性**。

一、有界输入、有界状态（BIBS）稳定

首先研究：

$$x(t) = e^{\mathbf{A}t}x(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

定义 1

1) 若$x(0)=0$，及在任意有界输入 $u(t)$ 作用下，均有$x(t)$有界，则称系统(A-1) **BIBS稳定**。

2) 若对任意的$x(0)$，及在任意有界输入$u(t)$作用下，均有$x(t)$有界，则称系统(A-1) **BIBS全稳定**。

定理7-6

1) 系统(A-1)**BIBS** 稳定$\Leftrightarrow$系统(A-1)全体可控模态具负实部（相应的运动模式收敛）；

（ **BIBS** 稳定与不可控模式无关！ ）

2) 系统(A-1)**BIBS** 全稳定$\Leftrightarrow$系统(A-1)全体可控模式收敛（可控模态具负实部）、全体不可控模式不发散。

定理7-6 可以用可控性分解来证明。不妨假定，(A-1)式中的矩阵**A**、**B**已有可控性分解形式。这时有

$$x(t)=\begin{bmatrix} e^{\mathbf{A}_1 t} & \times \\ 0 & e^{\mathbf{A}_4 t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \int_0^t e^{\mathbf{A}_1(t-\tau)}\mathbf{B}_1 u(\tau)d\tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

当$x(0)=0$时，$x(t)$的表达式中只有第二项，这项与不可控模式无关，而

$$\left\|\int_0^t e^{\mathbf{A}_1(t-\tau)}\mathbf{B}_1 u(\tau)d\tau\right\|=\left\|\int_0^t e^{\mathbf{A}_1\tau}\mathbf{B}_1 u(t-\tau)d\tau\right\|$$

$$\le \int_0^t \left\|e^{\mathbf{A}_1\tau}\mathbf{B}_1 u(t-\tau)\right\|d\tau \le K\int_0^\infty \left\|e^{\mathbf{A}_1\tau}\mathbf{B}_1\right\|d\tau$$

K是$u(t)$的界，上式有界当且仅当$\mathbf{A}_1$的特征值均具负实部.

当考虑全稳定时, $\mathbf{A}$ 的所有模式均要涉及到，故需加上 $\left\|e^{\mathbf{A}_4 t}\right\|$ 有界的条件，而这个条件就是$\mathbf{A}_4$的Lyapunov稳定条件。

从复数域上的判别：从表达式(A-3)可知，**BIBS**稳定的条件就是: $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ 的极点均具负实部。这是因为不可控模态均已消去，故只要对可控模态提出要求即可。

Lyapunov稳定条件加上了**BIBS**稳定条件就是**BIBS**全稳定的条件。

二、有界输入、有界输出（BIBO）稳定

本节研究(A-2)式中的第三、四项：

$$y(t) = \underbrace{\mathrm{C}e^{\mathrm{A}t}x(0)}_{\mathbf{III}} + \underbrace{\int_0^t \mathrm{C}e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\mathrm{B}u(\tau)d\tau}_{\mathbf{IV}}$$

定义 2

1) 若$x(0)=0$,及在任意有界输入$u(t)$作用下，均有$y(t)$有界,则称系统(A-1) **BIBO**稳定。

2) 若对任意的$x(0)$, 及在任意有界输入$u(t)$作用下, 均有$y(t)$有界, 则称系统(A-1)**BIBO**全稳定。

定理7-7： 1) 系统(A-1)BIBO 稳定⇔系统(A-1)全体可控可观模式收敛(可控、可观模态具负实部）；

2) 系统(A-1) BIBO 全稳定⇔系统(A-1)全体可控可观模式收敛、全体可观不可控模式不发散。

证明： 1）从$y(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s)$即可看出。因为此时不可控、不可观的模态均被消去，故必须全体可控、可观模态具负实部。

从标准分解形式

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1\\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2\\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_3\\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{A}}_{11} & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{13} & 0\\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24}\\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{33} & 0\\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}_1\\ \bar{\mathbf{x}}_2\\ \bar{\mathbf{x}}_3\\ \bar{\mathbf{x}}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{B}}_1\\ \bar{\mathbf{B}}_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{u},\quad \mathbf{y}=[\bar{\mathbf{C}}_1\quad 0\quad \bar{\mathbf{C}}_3\quad 0]\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}_1\\ \bar{\mathbf{x}}_2\\ \bar{\mathbf{x}}_3\\ \bar{\mathbf{x}}_4\end{bmatrix}+\mathbf{Du}$$

则易于验证：

$$y(t)=\int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau=\int_0^t \mathbf{C}_1 e^{\mathbf{A}_{11}(t-\tau)}\mathbf{B}_1 u(\tau)d\tau$$

于是系统 **BIBO** 稳定就等价于$\mathbf{A}_{11}$的所有特征值均具负实部（相应的模式收敛）。

注：从复数域上判别：

BIBO稳定研究

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{G}(s)$$

的极点是否具有负实部，这正是经典控制理论中研究的稳定性。判别$\mathbf{G}(s)$的极点是否全在左半平面，可用Routh或Hurwitz判据。

2) 只要证明全体可观不可控模式必须不发散就可以了，而这对应于零输入响应（第3项）。

考虑可观测性分解。不妨假定 (A-1)式中的矩阵**A**、**C**已具有可观性分解形式。这时有

$$\tilde{x}(t)=\begin{bmatrix} e^{\mathbf{A}_1 t} & 0 \\ \times & e^{\mathbf{A}_4 t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}\Rightarrow,$$

$$\tilde{y}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & 0\end{bmatrix}\tilde{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\mathbf{A}_1 t} & 0 \\ \times & e^{\mathbf{A}_4 t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}=\mathbf{C}_1 e^{\mathbf{A}_1 t} x_1(0)$$

$\mathbf{A}_1$中的模态有且只有两部分：

$$\{可观+可控\}\cup\{可观+不可控\}$$

如前所述，可控可观的模式必须收敛，显然，要使 **BIBO** 全稳定，全体可观不可控模式必须不发散。

证完。

定理7-6、 7-7表明 **BIBS** 稳定、**BIBO** 稳定与系统可控性、可观性密切相关。

例： 考虑系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x$$

讨论其**BIBS**、**BIBO**及**BIBS**、**BIBO**全稳定。

解： 系统是不可控但可观测的，可控模态是–1。根据定理7-6，系统**BIBS**稳定，但非**BIBS**全稳定。

又系统可控、可观的模态是–1，故系统**BIBO**稳定。但不可控、可观的模态是1，故系统也非**BIBO**全稳定。