第十五讲

输入状态/输入输出稳定性

线性时不变系统的稳定性分析

系统方程为

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \qquad y = \mathbf{C}x \qquad (\mathrm{A}-1)$$

$$x(t) = e^{\mathrm{A}t}x(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathrm{A}t}x(0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau \qquad (\mathrm{A\text{-}2})$$

或用复数域表示

$$x(s) = (s\mathrm{I} - \mathbf{A})^{-1}x(0) + (s\mathrm{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s)$$

$$y(s) = \mathbf{C}(s\mathrm{I} - \mathbf{A})^{-1}x(0) + \mathbf{C}(s\mathrm{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s) \qquad (\mathrm{A}-3)$$

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x(0)}_{\mathrm{I}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\mathrm{II}}$$

$$y(t) = \underbrace{Ce^{At}x(0)}_{\mathrm{III}} + \underbrace{\int_0^t Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau}_{\mathrm{IV}}$$

可见$x(t)$,$y(t)$由四部分组成。稳定性问题是**A**的特征值问题，但以四项形式出现，与**B**、**C**阵密切相关，这说明对系统采用状态空间描述时,**带来了新的稳定性概念，这些稳定性概念又和系统可控性、可观测性密切相关。**

等价变换对稳定性的影响：如果对动态方程(A-1)

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \qquad y = \mathbf{C}x \qquad (\mathrm{A}-1)$$

进行等价变换,不会改变运动模式的性质，因而也不会改变(A-2)式中四项的有界性，即**等价变换不改变稳定性**。

一、有界输入、有界状态（BIBS）稳定

首先研究：

$$x(t) = e^{\mathbf{A}t}x(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

定义 1

1) 若$x(0)=0$，及在任意有界输入 $u(t)$ 作用下，均有$x(t)$有界，则称系统(A-1) **BIBS稳定**。

2) 若对任意的$x(0)$，及在任意有界输入$u(t)$作用下，均有$x(t)$有界，则称系统(A-1) **BIBS全稳定**。

定理7-6

1) 系统(A-1)**BIBS** 稳定$\Leftrightarrow$系统(A-1)全体可控模态具负实部（相应的运动模式收敛）；

（**BIBS** 稳定与不可控模式无关！）

2) 系统(A-1)**BIBS** 全稳定$\Leftrightarrow$系统(A-1)全体可控模式收敛（可控模态具负实部）、全体不可控模式不发散。

定理7-6 可以用可控性分解来证明。不妨假定，(A-1)式中的矩阵**A**、**B**已有可控性分解形式。这时有

$$x(t)=\begin{bmatrix} e^{\mathbf{A}_1 t} & \times \\ 0 & e^{\mathbf{A}_4 t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \int_0^t e^{\mathbf{A}_1(t-\tau)}\mathbf{B}_1 u(\tau)d\tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

当$x(0)=0$时，$x(t)$的表达式中只有第二项，这项与不可控模式无关，而

$$\left\|\int_0^t e^{\mathbf{A}_1(t-\tau)}\mathbf{B}_1 u(\tau)d\tau\right\|=\left\|\int_0^t e^{\mathbf{A}_1\tau}\mathbf{B}_1 u(t-\tau)d\tau\right\|$$

$$\le \int_0^t \left\|e^{\mathbf{A}_1\tau}\mathbf{B}_1 u(t-\tau)\right\|d\tau \le K\int_0^\infty \left\|e^{\mathbf{A}_1\tau}\mathbf{B}_1\right\|d\tau$$

K是$u(t)$的界，上式有界当且仅当$\mathbf{A}_1$的特征值均具负实部.

当考虑全稳定时, $\mathbf{A}$ 的所有模式均要涉及到，故需加上 $\left\| e^{\mathbf{A}_4 t} \right\|$ 有界的条件，而这个条件就是$\mathbf{A}_4$的Lyapunov稳定条件。

从复数域上的判别：从表达式(A-3)可知，**BIBS**稳定的条件就是: $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ 的极点均具负实部。这是因为不可控模态均已消去，故只要对可控模态提出要求即可。

Lyapunov稳定条件加上了**BIBS**稳定条件就是**BIBS**全稳定的条件。

二、有界输入、有界输出（BIBO）稳定

本节研究(A-2)式中的第三、四项：

$$y(t) = \underbrace{\mathrm{C}e^{\mathrm{A}t}x(0)}_{\mathbf{III}} + \underbrace{\int_0^t \mathrm{C}e^{\mathrm{A}(t-\tau)}\mathrm{B}u(\tau)d\tau}_{\mathbf{IV}}$$

定义 2

1) 若$x(0)=0$,及在任意有界输入$u(t)$作用下，均有$y(t)$有界,则称系统(A-1) **BIBO**稳定。

2) 若对任意的$x(0)$, 及在任意有界输入$u(t)$作用下, 均有$y(t)$有界, 则称系统(A-1)**BIBO**全稳定。

定理7-7： 1) 系统(A-1)BIBO 稳定⇔系统(A-1)全体可控可观模式收敛(可控、可观模态具负实部）；

2) 系统(A-1) **BIBO** 全稳定⇔系统(A-1)全体可控可观模式收敛、全体可观不可控模式不发散。

证明： 1）从$y(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}u(s)$即可看出。因为此时不可控、不可观的模态均被消去，故必须全体可控、可观模态具负实部。

从标准分解形式

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_3 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{13} & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \\ \bar{\mathbf{x}}_3 \\ \bar{\mathbf{x}}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u},\ \mathbf{y} = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad 0 \quad \bar{\mathbf{C}}_3 \quad 0] \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \\ \bar{\mathbf{x}}_3 \\ \bar{\mathbf{x}}_4 \end{bmatrix} + \mathbf{Du}$$

则易于验证：

$$y(t)=\int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau=\int_0^t \mathbf{C}_1 e^{\mathbf{A}_{11}(t-\tau)}\mathbf{B}_1 u(\tau)d\tau$$

于是系统 **BIBO** 稳定就等价于$\mathbf{A}_{11}$的所有特征值均具负实部（相应的模式收敛）。

注：从复数域上判别：

BIBO稳定研究

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{G}(s)$$

的极点是否具有负实部，这正是经典控制理论中研究的稳定性。判别$\mathbf{G}(s)$的极点是否全在左半平面，可用Routh或Hurwitz判据。

2) 只要证明全体可观不可控模式必须不发散就可以了，而这对应于零输入响应（第3项）。

考虑可观测性分解。不妨假定 (A-1)式中的矩阵**A**、**C**已具有可观性分解形式。这时有

$$\tilde{x}(t)=\begin{bmatrix} e^{\mathbf{A}_1 t} & 0 \\ \times & e^{\mathbf{A}_4 t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}\Rightarrow,$$

$$\tilde{y}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & 0\end{bmatrix}\tilde{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\mathbf{A}_1 t} & 0 \\ \times & e^{\mathbf{A}_4 t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix}=\mathbf{C}_1 e^{\mathbf{A}_1 t} x_1(0)$$

$\mathbf{A}_1$中的模态有且只有两部分：

$$\{\text{可观+可控}\}\cup\{\text{可观+不可控}\}$$

如前所述，可控可观的模式必须收敛，显然，要使**BIBO** 全稳定，全体可观不可控模式必须不发散。

证完。

定理7-6、 7-7表明 **BIBS** 稳定、**BIBO** 稳定与系统可控性、可观性密切相关。

例： 考虑系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}x$$

讨论其BIBS、BIBO及BIBS、BIBO全稳定。

解： 系统是不完全可控但可观测的，可控模态是–1。根据定理7-6，系统BIBS稳定，但非BIBS全稳定。

又系统可控、可观的模态是–1，故系统BIBO稳定。但不可控、可观的模态是1，故系统也非BIBO全稳定。

三、总体稳定(T 稳定)

定义　　若对任意的 $x(0)$ 及在任意有界输入 $u(t)$ 作用下, 均有 $x(t)$ 、 $y(t)$ 有界, 则称系统(A-1) 总体稳定。

总体稳定包含了**BIBO**全稳定和**BIBS**全稳定；而**BIBS**全稳定蕴涵**BIBO** 全稳定，于是我们有

总体稳定的充分必要条件是BIBS全稳定。

四、稳定性之间的关系

定理7-8 若（A， C）可观，则有

$$\text{BIBO 稳定} \Leftrightarrow \text{BIBS 稳定}$$

证明： “$\Leftarrow$” 显然。下面证 “$\Rightarrow$”：

假定系统已具可控性分解形式：

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ 0 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \end{cases} \Rightarrow y = \underbrace{\mathbf{C}_1(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1}_{\mathbf{G}(s)}[u]$$

则(A,C)可观意味子系统($\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{C}_1$)是可控可观测的。BIBO $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}_1$的所有特征值均具负实部。 另外，($\mathbf{A}_1$, $\mathbf{B}_1$)可控、 $\mathbf{A}_1$的所有特征值均具负实部$\Leftrightarrow$ BIBS 稳定。

证完。

定理7-9 若（**A**, **B**）可控，则有

$$\textbf{BIBS}\text{ 稳定} \Leftrightarrow \mathrm{Re}\lambda_i(\mathbf{A})<0,\ \forall\lambda_i$$

证明： 只需要证 **BIBS** 稳定$\Rightarrow$ Re $\lambda_i(\mathbf{A})<0$即可。

事实上，系统 **BIBS** 稳定等价于所有可控模态所对应的模式收敛，即可控模态（特征值）具负实部。因为（**A**, **B**）可控，故**A**阵的所有模态（特征值）均为可控模态，此时系统 **BIBS** 稳定必等价于其所有特征值均具负实部，从而，所有的模式均收敛。

证完。

定理 7-10 若（A，B，C）可观、可控，则有 BIBO 稳定 $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Re}\lambda_i(A)<0$

证明：

$$\text{BIBO稳定} \underset{\text{定理7-8}}{\overset{(A,C)\text{可观}}{\rightleftarrows}} \text{BIBS稳定} \underset{\text{定理7-9}}{\overset{(A,B)\text{可控}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Re}\,\lambda_i(A) < 0$$

定理7-11

BIBS 全稳定 $\Leftrightarrow$ BIBS 稳定，且A Lyapunov稳定

定理7-12 若（**A**，**C**）可观，则有

BIBO 全稳定 $\Leftrightarrow$ **BIBO** 稳定、 **A** Lyapunov稳定

证明： 充分性显然。必要性：因(**A**, **C**)可观测，则所有的模式均可出现在

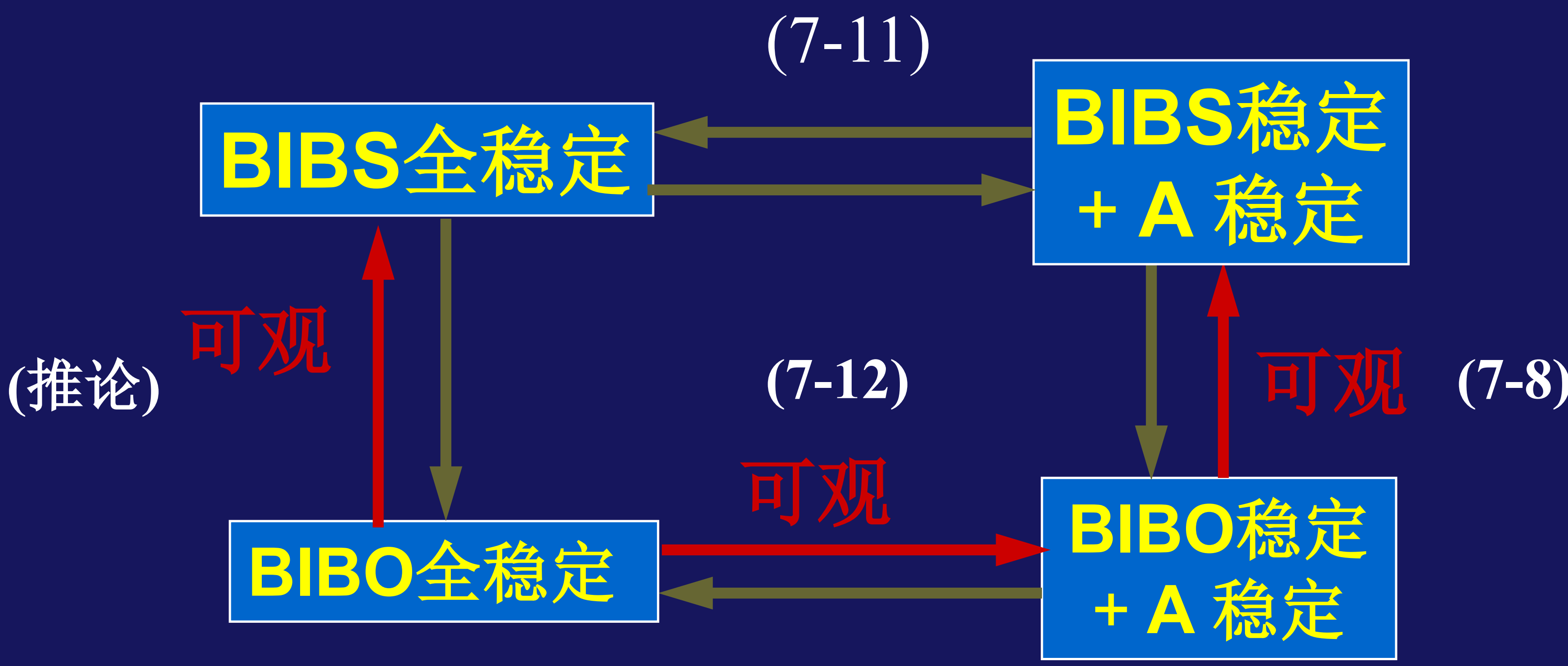
$$\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}x(0)$$

中。由于x_0的任意性，要求**A** Lyapunov稳定。 **证完**

推论： 若（**A**, **C**）可观，则 **BIBO** 全稳定与 **BIBS** 全稳定等价。

证明： 由定理7-12，**BIBO**全稳定等价于**BIBO**稳定、**A** 是Lyapunov稳定；而定理7-8表明系统还是**BIBS**稳定的。故由定理7-11知结论真。 **证完**

BIBS全稳定
BIBO全稳定



(推论) 若（A、C）可观，则有

(7-12) 若（A、C）可观，则有

BIBO稳定 ⟺ BIBS稳定

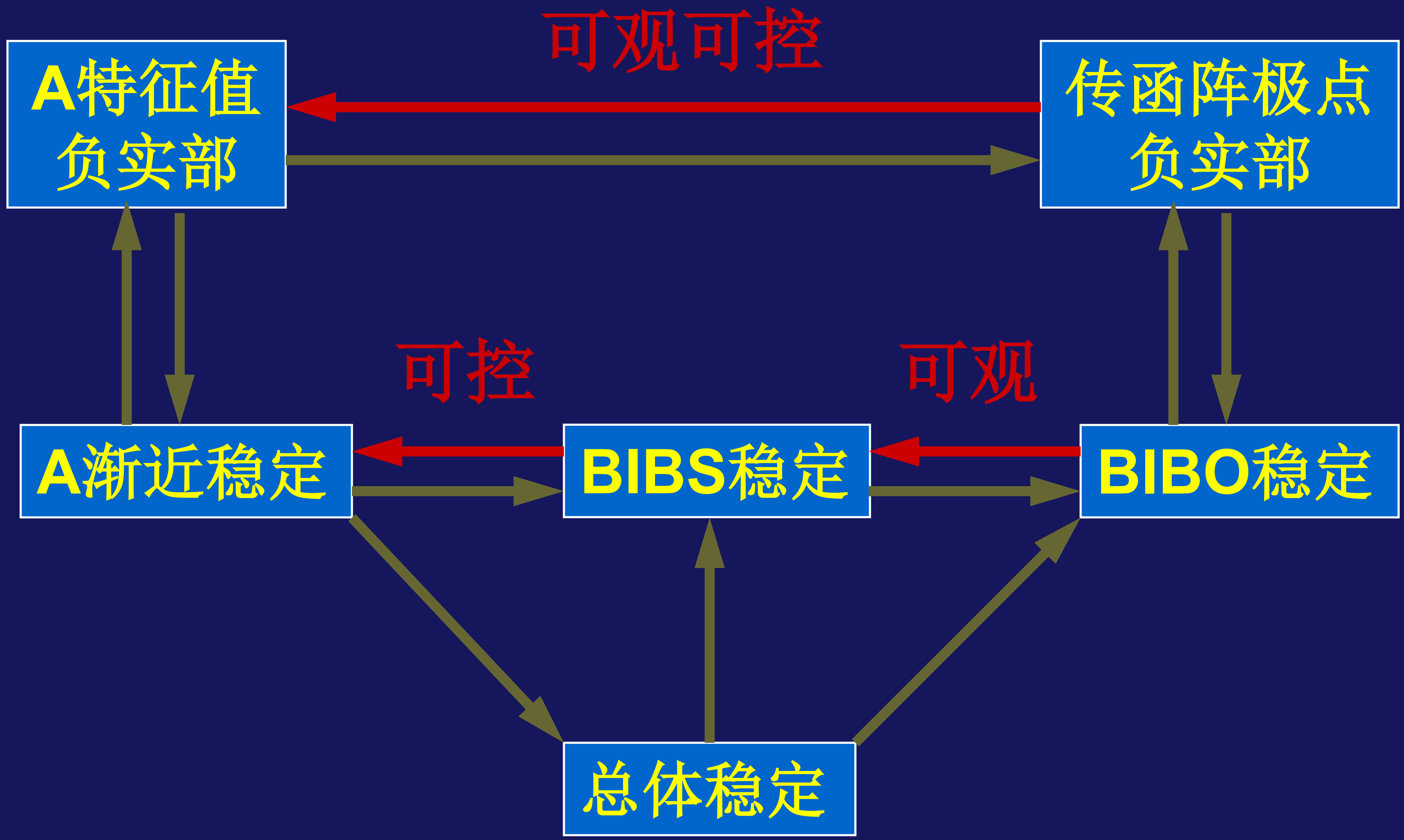
BIBO全稳定 ⟺ BIBO稳定,A李氏稳定

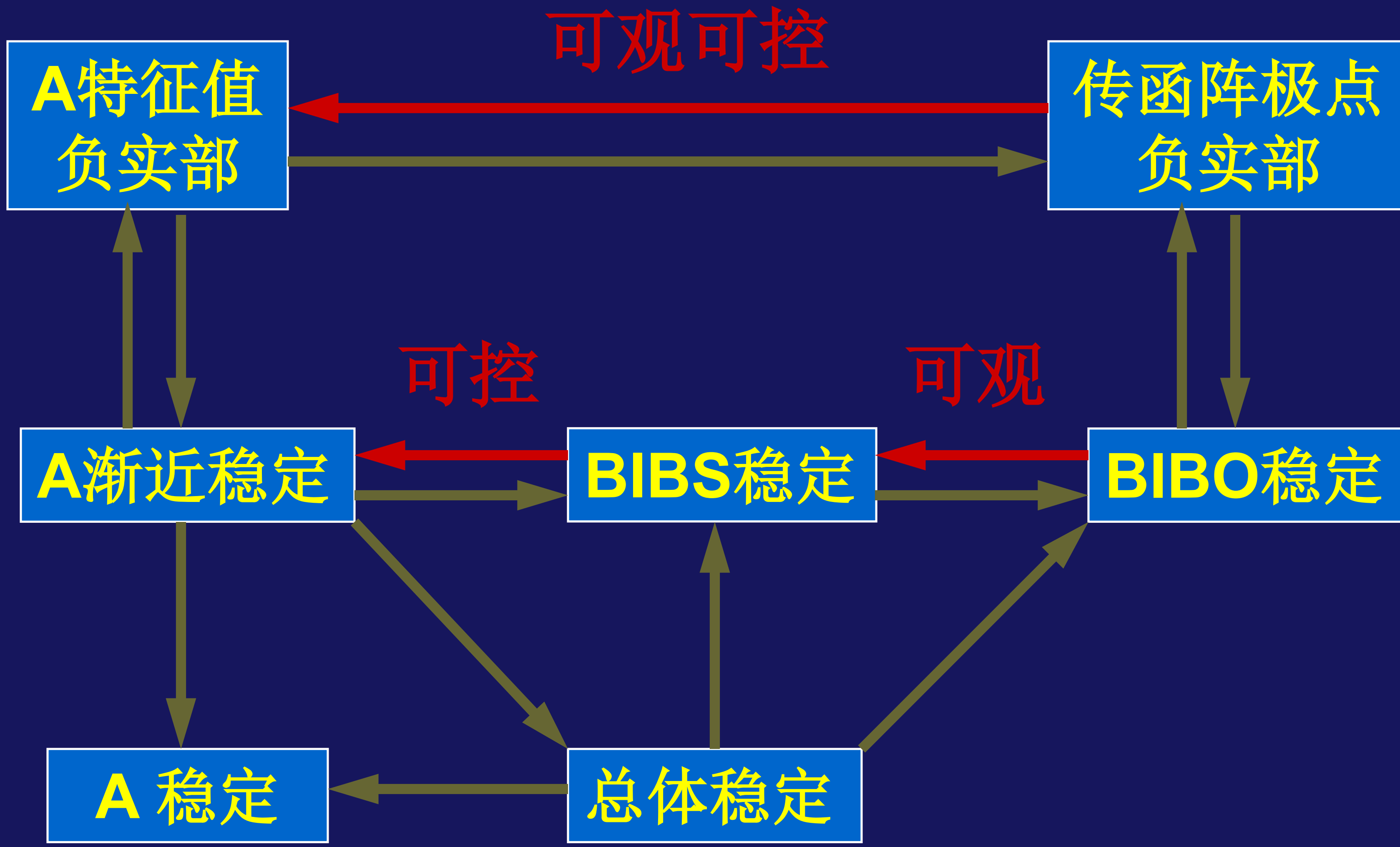
定理7-13 若（**A**，**B**，**C**）可观、可控，以下事实等价

1. **BIBO** 稳定;
2. **BIBS** 稳定;
3. **A** 渐近稳定;
4. **A** 的所有特征值具负实部;
5. 传递函阵极点具负实部;
6. 总体稳定

注： 定理中的5 用到了第三章中的定理3-8：**(A,B,C)**可控、可观测的充分必要条件是**G**(*s*)的极点多项式与**A**的特征多项式相等。

定理 7-13 若（A、B、C）可观、可控，则有 BIBO稳定 ⟺ $\mathrm{Re}\lambda_i(A)<0$




可观可控
A特征值负实部
传函阵极点负实部
可控
可观
A渐近稳定
BIBS稳定
BIBO稳定
A 稳定
总体稳定

时不变系统判断各种意义下的稳定性，一般要求出**A**的特征值，再对这些特征值的可控、可观性进行研究，再根据定理作判断。因为系统的可控性、可观性与传函阵零、极点对消（或约去不可控或者不可观测模态）有联系，因此可以不去判别各特征值的可控、可观性，直接计算：

BIBS 稳定：　$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ (所有极点在左半面）

BIBS 全稳定：$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ (不发散) + **BIBS** 稳定

BIBO 稳定：　$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ (所有极点在左半面）

BIBO 全稳定：$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ (不发散) + **BIBO** 稳定

由计算的结果判别。

例1： 考虑系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

讨论其**BIBS**、**BIBO**及**BIBS**、**BIBO**全稳定。

解： 可以从复数域（传递函数）的角度来讨论：

BIBS:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} b = \begin{bmatrix} s-1 & 0 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

BIBO:

$$g(s)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ -1 & s+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{s+1}$$

BIBS全稳定：否

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}x(0)=\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ -1 & s+1\end{bmatrix}^{-1}x(0)=\begin{bmatrix}\frac{1}{s-1} & 0\\ \frac{1}{(s+1)(s-1)} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}x(0)$$

BIBO全稳定：否

$$c(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}x(0)=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ -1 & s+1\end{bmatrix}^{-1}x(0)=\begin{bmatrix}\frac{s+2}{(s+1)(s-1)} & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}x(0)$$

例2 系统状态方程和输出方程如下

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -b \end{bmatrix} x$$

其中a_1、a_2和 b 均为实常数，试分别给出满足下列条件时，a_1 、a_2和b的取值范围

1. 李亚普诺夫意义下稳定；

2. 有界输入、有界输出(**BIBO**)稳定。

解： 特征多项式为 $s(s^2+a_2 s+a_1)=0$

1 李氏稳定：

1) $a_1>0 \quad a_2>0$

特征值一个为0，两个有负实部；

2) $a_1=0$ ，$a_2>0$

特征值两个为0，一个有负实部。经验算，零特征值几何重数与代数重数相同，初等因子为一次；

3) $a_1>0 \quad a_2=0$

一个零特征值，一对共轭零实部特征值。

4) $a_1=0$, $a_2=0$，系统不稳定。

2 BIBO稳 定：

$$G(s)=\frac{b}{s}-\frac{bs}{s^2+a_2s+a_1}=\frac{b(a_2s+a_1)}{s(s^2+a_2s+a_1)}$$

1. $b=0 \qquad G(s)=0,\quad \text{BIBO}$

2. $b\neq 0 \qquad a_1=0 \quad a_2=0 \quad G(s)=0,\quad \text{BIBO}$

此外， 在a_1、 a_2的任何其它取值的情形下都不会 **BIBO** 稳定。

例3： 考虑动态方程：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-a & 0 & 0\\ 5 & -5 & -15\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 5\\ -1\end{bmatrix}u,\ y=\begin{bmatrix}b & 0 & 0\end{bmatrix}x$$

讨论当常数a、b为何值时有

1.关于零解李氏稳定；

2.系统**BIBS**稳定；

3.系统**BIBO**稳定。

解 系统可控性矩阵是：$\begin{bmatrix}b & \mathbf{A}b & \mathbf{A}^2b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -a & a^2\\ 5 & -5 & 25-5a\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

使系统不可控的a=0, 5/2。

1. 考察零解的李氏稳定性：

由 $$|s\mathbf{I}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} s+a & 0 & 0 \\ -5 & s+5 & 15 \\ 0 & 0 & s \end{vmatrix} = s(s+5)(s+a)$$

易见：

- $a>0$， 三根为 0， -5，$-a$ 李氏稳定;
- $a<0$， 有正根，不稳定;
- $a=0$，二根为零，一根为-5，且

$$rank(s\mathbf{I}-\mathbf{A})_{s=0}=1$$

零特征根的代数重数等于几何重数，故李氏稳定。

2 系统BIBS稳定：只要考察（$s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ 即可：

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+a} & 0 & 0\\ \dfrac{5}{(s+a)(s+5)} & \dfrac{1}{s+5} & \dfrac{-15}{s(s+5)}\\ 0 & 0 & \dfrac{1}{s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\5\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+a}\\ *\\ \dfrac{-1}{s}\end{bmatrix}$$

这说明不论a取何值，均有一个s=0是可控的，故BIBS不稳定。

或者，由

$$\left|s\mathbf{I}-\mathbf{A}\right| = s(s+5)(s+a)$$

结合可控性矩阵，可看出，无论 a 取何值， 总有一个 s=0 是可控的。故系统必不是**BIBS**稳定的。

3 BIBO稳定： $\mathbf{c}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \dfrac{b}{s+a}$ $\quad b \neq 0, a > 0,$ **BIBO**;

b=0、a 任意，**BIBO**稳定。

例4 系统动态方程为

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \sigma & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & b & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

试分别给出系统满足各种稳定性时，参数a、b、σ、λ应满足的充分必要条件。

解

由$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=0$有解$\sigma \pm j$和二重的$\lambda$可知：

1. x =0李雅普诺夫意义下稳定：$\sigma \le 0 \quad \lambda < 0$

2. x =0渐近稳定：$\sigma < 0 \quad \lambda < 0$

3 BIBS稳定：

$a=0$时其可控部分是由$(\mathbf{A}_2,b_2)$决定的，只需 $\lambda<0$ 即可；

σ为任意实数；

$a\neq 0$时，由于有特征值$\sigma\pm j$，必须$\sigma<0$ $\lambda<0$。

4 BIBS全稳定：BIBS全稳定等价于所有可控的模式收敛、所有不可控的模式不发散。

$a\neq 0$时，系统可控，对特征值$\sigma\pm j$，必须$\sigma<0$ $\lambda<0$。

$a=0$时其可控部分是由$(\mathbf{A}_2,b_2)$决定的，需要$\lambda<0$；

其不可控部分的根均为单根：$\sigma\pm j$，需要$\sigma\leq 0$ 就可以了。

5 BIBO稳定： 根据定理 7-7: **BIBO**稳定等价于所有可控可观的模式收敛。

一：$b=0$时，λ对应若当块不可观

$$\begin{cases} a=0, & \sigma\text{对应若当块不可控，}\sigma,\lambda\text{为任意实数} \\ a\neq 0, & \sigma\text{对应若当块可控，}\sigma<0\text{，}\lambda\text{为任意实数} \end{cases}$$

二：$b\neq 0$时，λ对应若当块可观

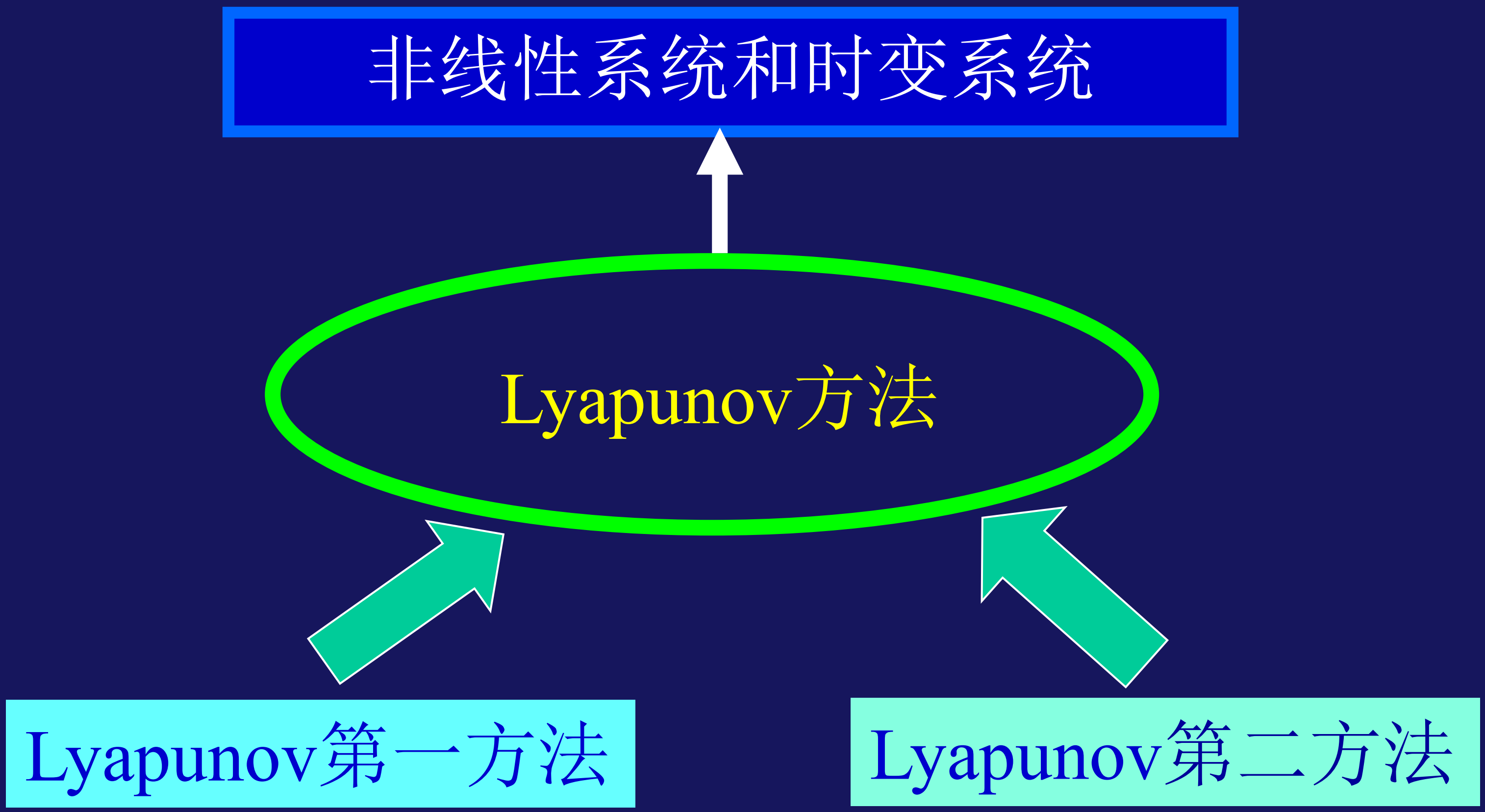
$$\begin{cases} a=0, & \sigma\text{对应若当块不可控,}\sigma\text{为任意}\lambda<0, \\ a\neq 0, & \sigma\text{对应若当块可控，}\sigma<0,\lambda<0 \end{cases}$$

6 BIBO全稳定： BIBO全稳定等价于所有可控可观的模式收敛、所有可观不可控模式不发散：

第一种情形：$b=0\begin{cases} a=0, \sigma \le 0, \lambda \text{可为任意实数} \\ a \ne 0, \sigma < 0, \lambda \text{可为任意实数} \end{cases}$

第二种情形：$b \ne 0\begin{cases} a=0 \quad \sigma \le 0 \quad \lambda < 0 \\ a \ne 0 \quad \sigma < 0 \quad \lambda < 0 \end{cases}$

Lyapunov第二方法


非线性系统和时变系统
Lyapunov方法
Lyapunov第一方法
Lyapunov第二方法

Lyapunov第二方法

为了分析稳定性, **Lyapunov**提出了两种方法:

第一方法 用微分方程的显式解对稳定性进行分析，是一个间接的方法。

第二方法不是求解微分方程组，而是通过构造所谓**Lyapunov**函数（标量函数）来**直接判断**运动的稳定性，因此又称为**直接法**。

例: 考虑如下系统关于零解的稳定性:

$$\dot{x} = -5x$$

首先构造一个函数:

$$v(x) = x^2$$

显然, $v(x) > 0, \forall x \neq 0$, 且 $v(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$。

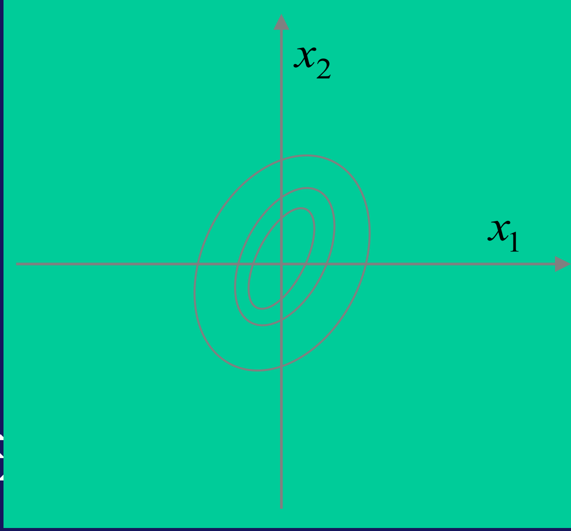
现考虑v沿上述微分方程的解对时间t的导数,有

$$\dot{v} = 2x\dot{x} = -10x^2 < 0, \forall x \neq 0$$

这意味着$v(x)$,从而x必将渐近收敛到零。我们得出了这个结论但却并未求解微分方程。

例： 考虑阻尼线性振动系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$



试研究其平衡状态$x_1 = 0, x_2 = 0$的稳定性

类似于前例，取一个函数，通常称为v 函数：

$$v(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2$$

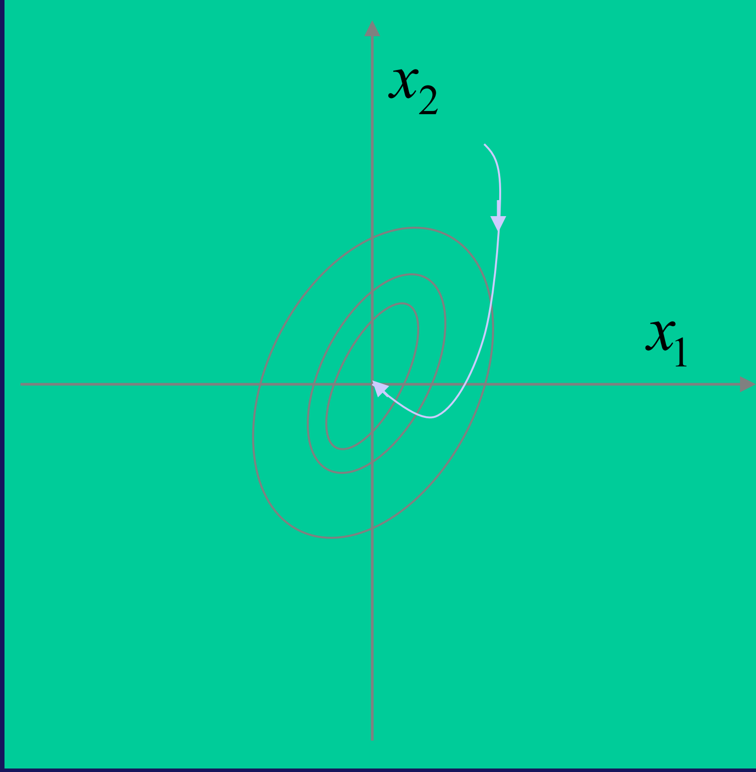
易于验证，这是一个常正函数。而方程

$3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 = C$, 当$0 < C < \infty$时表示一个椭圆族。

求出 v 沿微分方程解的导数：

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2}\dot{x}_2 = (6x_1 + 2x_2)x_2 + (2x_1 + 4x_2)(-x_1 - x_2) = -2(x_1^2 + x_2^2)$$

当x_1和x_2不同时为零时，即在相平面上，除原点$x_1=x_2=0$外，总有$dv/dt<0$，这说明v总是沿着微分方程的运动而减小的。也就是说，运动轨线从v=C的椭圆的外面穿过椭圆走向其内部。因此，系统关于零解必是渐近稳定的。



以上例子说明，借助于一个特殊的v函数，不求解微分方程，就可以按v及dv/dt的符号性质来判断零解的稳定性。

这就是Lyapunov第二方法的思想。

利用$Lyapunov$ 函数判断零解的稳定性包含如下要点：

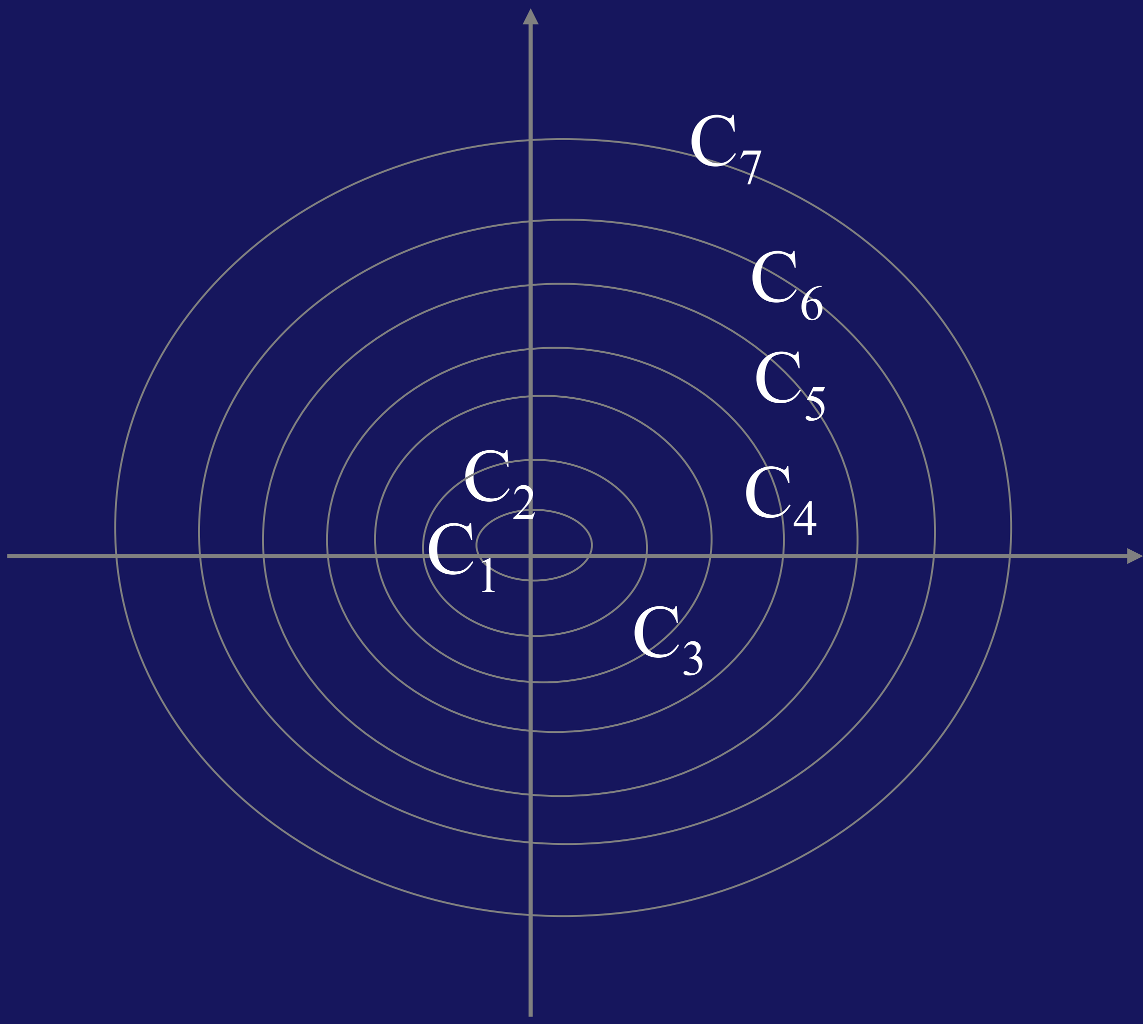
1) 构造一个函数$v(x_1,\ldots,x_n)$,它具有一定的符号特性，例如证明渐近稳定时要求$v(x_1,\ldots,x_n)=C(C>0)$,且当C趋向于零时是一闭的、层层相套的、向原点退缩的超曲面族；

2) $v(x_1,\ldots,x_n)$沿微分方程的解对时间t 导数$dv/dt=w(x_1,\ldots,x_n)$也具有一定的符号性质，例如负定或半负定。

$v(x)=C_i>0$为正定二次型时的等值线示意图：

这是一族闭的、层层相套的、当C趋向于零时向原点退缩的曲线。$C_1<C_2<C_3<C_4<C_5<C_6<C_7$

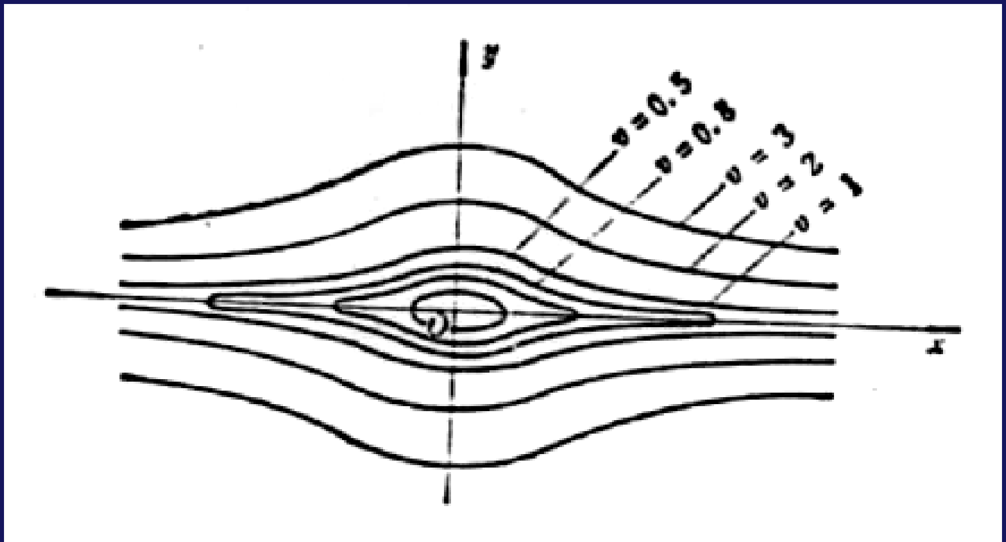
取$v(x)$为正定二次型时，$v(x)$ =C（>0)为一超椭球族。更一般的正定函数，不一定有此性质。



取$v(x)$为正定二次型时，$v(x)$ =C（>0)为一超椭球族。更一般的正定函数，不一定有此性质。

$$V = y^2 + \frac{x^2}{1+x^2} = C$$

v正定，$v(x,y)=C$也不一定是一闭曲面族。



可以证明：$v(x)$ 为任意正定函数，只要C> 0很小，$v(x) = C$ 是包围原点的闭曲面，且当 C 趋向于零时向原点退缩。

一、函数定号性的定义

我们首先考察定义在$\|x\|<\Omega, t\geq t_0$上的实变量实值函数$v(x,t)$,这里，$\Omega>0$，并假定$v(x,t)$为单值连续的，且当x=0时，$v(0,t)=0, \forall t\geq t_0$。例如

$$v(x,t)=\frac{1}{1+t^2}(x_1^2+x_2^2), t\geq t_0>0$$

就是这样的函数。

定义7-12

(1) 若v不显含t, 只是x的函数，当$\|x\|<\Omega$时有$v(x)\geq 0(\leq 0)$, 且$v(x)=0$有非零解$x\neq 0$, 则称$v(x)$为常正(常负）函数。

例： $v(x)=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2$是一个常正函数。

若当$0<\|x\|<\Omega$时有$v(x)>0(<0)$，且$v(x)=0$仅有零解$x=0$, 则称$v(x)$为正定（负定）函数。

常正（负）函数又称为半正（负）定函数。**常正、常负函数统称常号函数。**

例： $v(x)=x_1^2+x_2^2$是一个正定函数。

（2）若$v(x,t)$在$t\geq t_0,\|x\|<\Omega$上恒有$v(x,t)\geq 0(\leq 0)$,

则称$v(x,t)$为常正(常负）函数。

例： $v(x,t)=\dfrac{1}{1+t^2}(x_1^2+x_2^2),t\geq t_0>0$就是一个常正函数。

注意到在这个例子中$\lim_{t\to\infty}v(x,t)=0$。

若当$\|x\|<\Omega$存在正定函数$w(x)$，使得对于$t \geq t_0$成立$v(x,t) \geq w(x)$，则称$v(x,t)$为正定函数；

若对于$t \geq t_0$，成立$v(x,t) \leq -w(x)$，则称$v(x,t)$为负定函数。

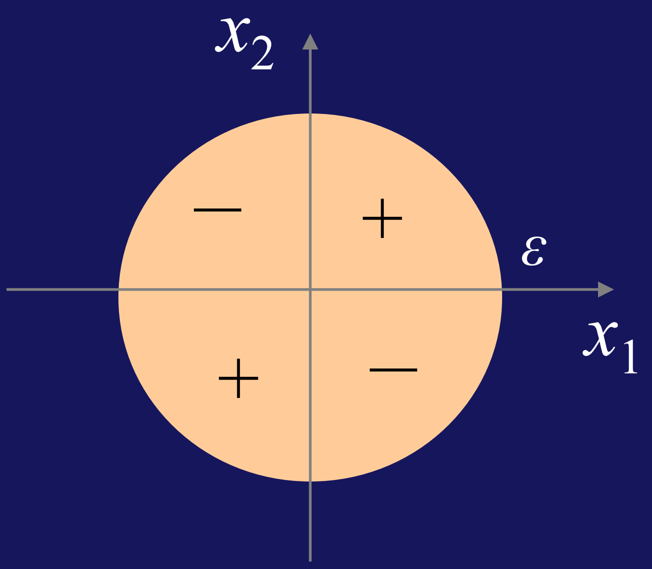
例： $v(x,t)=(1+\frac{1}{1+t^2})(x_1^2+x_2^2), t \geq t_0 > 0$,正定，只要取$w(x)=x_1^2+x_2^2$就可看出。

正定、负**定函**数统称**定**号**函**数。

（3）**不是常**号**和定**号**函**数**的函**数统称变号**函**数。

例： $v(x)=x_1x_2$是变号函数。

例： 变号 $v(x_1, x_2) = x_1 x_2$



正定和常正函数的例子：

例： $v(x,t) = (a + e^{-t})(x_1^2 + x_2^2)$（$a > 0$)是$t \geq t_0 > 0$上的正定函数。

例： $v(x,t) = e^{-t}(x_1^2 + x_2^2)$是$t \geq t_0 > 0$上的常正（半正定）函数。

（4）称$v(x,t)$是具无限小上界的，若存在正定函数 $w(x)$，使得$\left|v(x,t)\right| \le w(x)$，即$\lim_{\|x\|\to 0} v(x,t)=0$对 t一致。

例： $v(x,t)=x_1^2+tx_2^2$不具无限小上界，只要取$t=\dfrac{1}{x_2^2}$；

而$v(x,t)=x_1^2+\sin t\cdot x_2^2$具无限小上界，只要取

$$w(x)=x_1^2+x_2^2$$

即可。

二、几个主要定理

讨论方程

$$\dot{x} = f(x,t) \in \mathbf{R}^n, \quad f(0,t) = 0;$$

或

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0 \qquad (7-39)$$

$$x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T, f(x,t) = [f_1, f_2, \cdots, f_n]^T$$

关于平衡状态 $x = 0$ 的稳定性。

首先， 对函数 $v(x,t)$ 沿方程(7-39)的解对时间 t 求导数：

$$\frac{dv(x,t)}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_i}f_i(x,t)$$

$$=\frac{\partial v}{\partial t}+\begin{bmatrix}\frac{\partial v(x,t)}{\partial x_1} & \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial v(x,t)}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1(x,t)\\ f_2(x,t)\\ \vdots \\ f_n(x,t)\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\partial v}{\partial t}+\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right]^T f(x,t)$$

若 $v=v(x)$ ，则沿方程(7-39)的解对时间 t 求导数：

$$\frac{dv(x)}{dt}=(\frac{\partial v}{\partial x})^T f(x)=[\nabla v(x)]^T f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i(x)$$

定理7-20*（$Lyapunov$,1892):

$v(x,t)$正定（负定），且沿方程（7-39）

$$\dot{x} = f(x,t), \quad f(0,t) = 0 \qquad (7-39)$$

的运动关于时间的导数

$$\dot{v}(x,t) = \frac{\partial v}{\partial t} + (\frac{\partial v}{\partial x})^T f(x,t)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x,t) \le 0 (\ge 0) \quad (7-40)$$

则（7-39）的零解稳定。

注：

1) 这是一个**充分条件**；

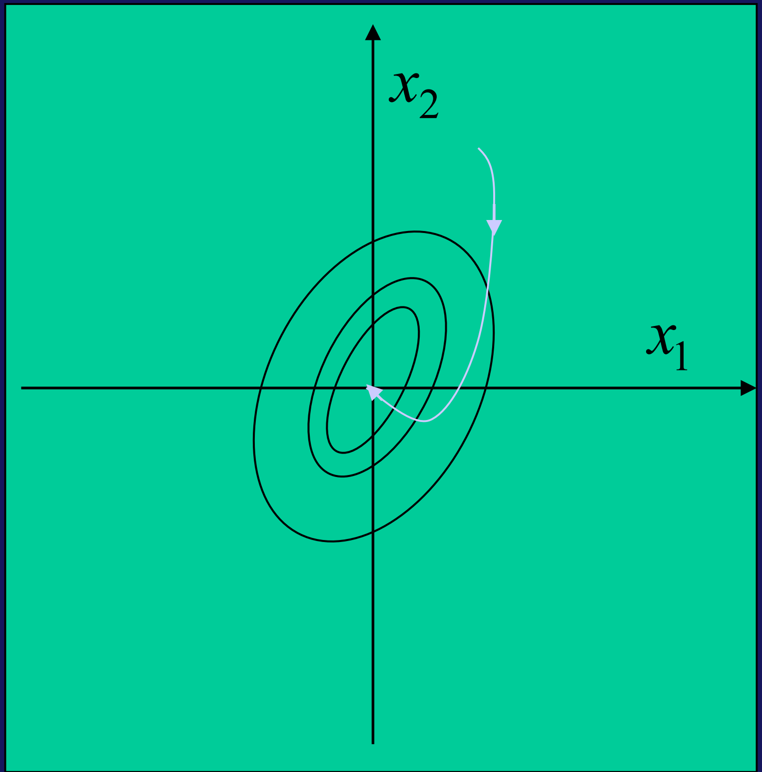
2) 若f从而 v不显含t，则结论为

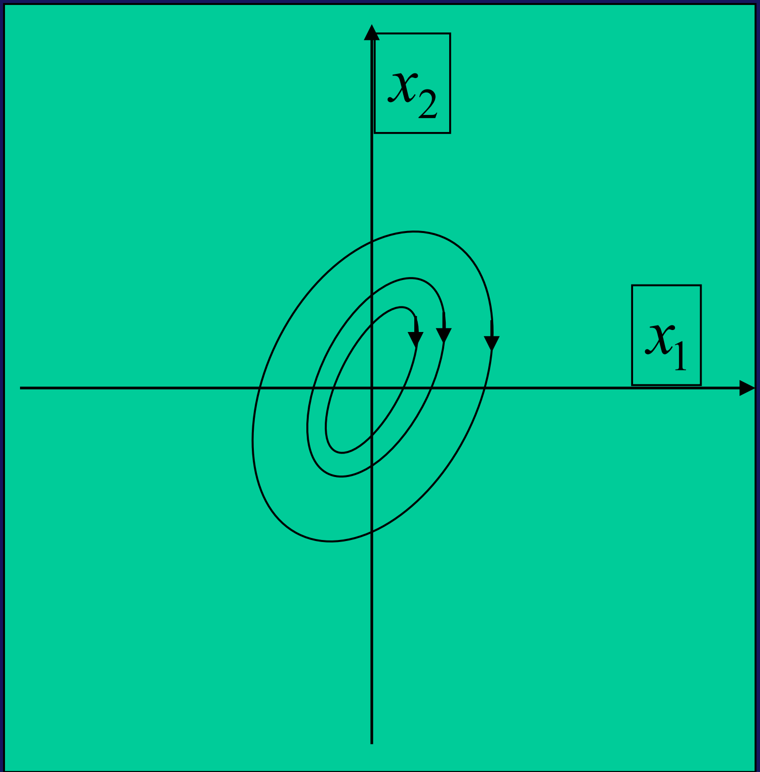
$$\dot{v}(x)=(\frac{\partial v}{\partial x})^T f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i(x)\le 0(\ge 0)$$

这里，$\dot{x}=f(x)$， $f(0)=0$

几何解释（仅讨论$v(x)$的情形）：

由于$v(x)$正定，$v(x)=C$是一个闭的曲面族，层层相套、随 $C\to 0$ 而向原点退缩。又由 $\dot{v}$ 半负定知$v(x)$的值沿着运动轨道只能减小或保持定值而不会增加，这表明系统关于原点（零解）是稳定的。



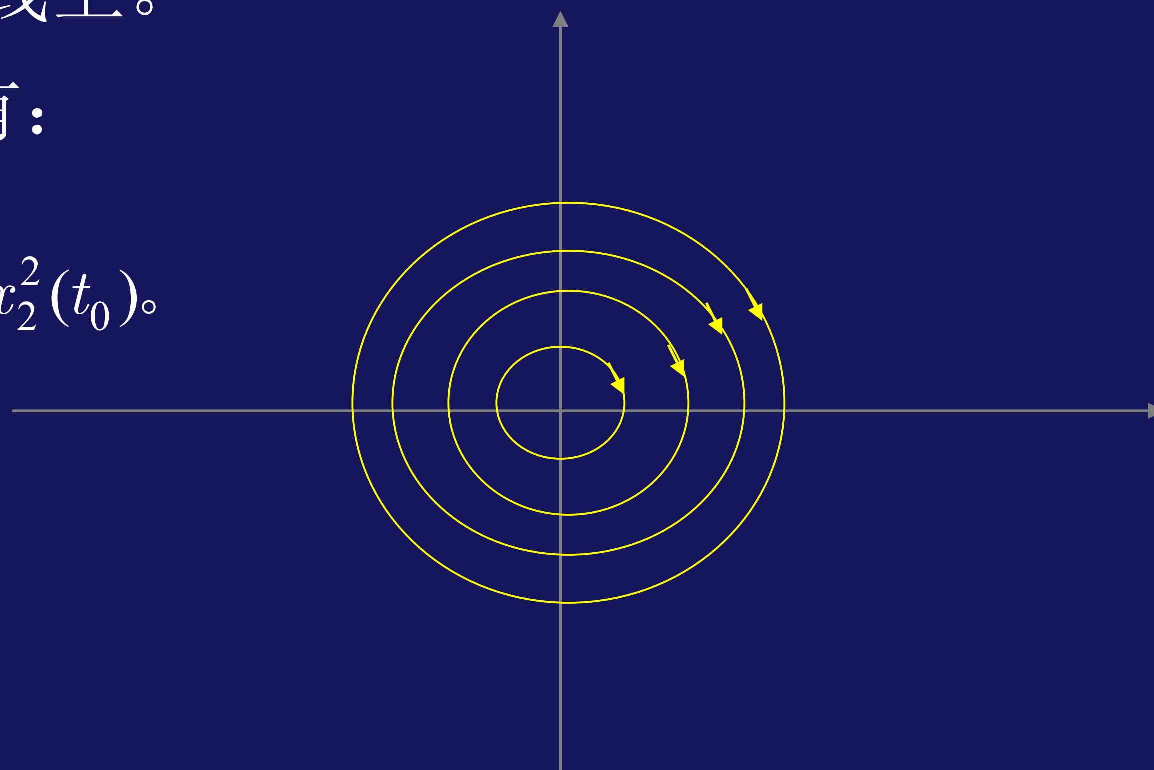


例： 考虑系统：
$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1\end{cases}$$

取 $v(x)=(x_1^2+x_2^2)$，则 $\dot{v}=2(x_1\dot{x}_1+x_2\dot{x}_2)=-2x_1x_2+2x_2x_1=0$，根据定理7－20，系统关于零解**Lyapunov**稳定。因 $\dot{v}=0$，可知相轨迹必在等值线上。

事实上，我们有：

$x_1^2(t)+x_2^2(t)=x_1^2(t_0)+x_2^2(t_0)$。



定理7-21* 若$v(x)$正定（负定），且$v(x)$沿方程（7-39）$dx/dt=f(x)$, $f(0)=0$ 解的导数

$$\frac{dv(x)}{dt}=(\frac{\partial v}{\partial x})^T f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v}{\partial x_i}f_i(x)<0(>0) \quad (7-40)$$

则（7-39）的零解渐近稳定。

几何解释：

由于$v(x)$正定， $v(x)=C$是一个闭的曲面族，层层相套、随C趋向于零而向原点退缩。而dv/dt负定则说明：在任一点x处， $v(x)$ 的值都是减小的，从而在任一点x处，运动的轨线都从$v(x)=C$的外部穿越$v(x)=C$走向内部。这表明， $\lim_{t\to 0}x(t)=0$，即原点（零解）是渐近稳定的。

例： 考虑小阻尼线性振动系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

研究其平衡状态$x_1 = 0, x_2 = 0$的稳定性。

若取$v(x) = x_1^2 + x_2^2$,则有

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2}\dot{x}_2 = 2x_1x_2 + 2x_2(-x_1 - x_2) = -2x_2^2 \le 0$$

这样只能判断系统是Lyapunov稳定，尽管事实上该系统是渐近稳定的，只要取

$$v(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 \qquad \text{则}\ \dot{v} < 0$$

定理7-22**　若$v(x)$正定（负定），$v(x)$沿方程（7-39）

$$\dot{x} = f(x),\quad f(0) = 0 \qquad (7-39)$$

的导数

$$\dot{v}(x) = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^T f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} f_i(x) \le 0(\ge 0) \qquad (7-40)^*$$

且沿方程（7-39）的非零解，$\dot{v}$ **不恒为零**，则（7-39）的零解渐近稳定。

例： 考虑小阻尼线性振动系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

研究其平衡状态$x_1 = 0, x_2 = 0$的稳定性。

若取$v(x) = x_1^2 + x_2^2$,则有

$$\dot{v} = \frac{\partial v}{\partial x_1}\dot{x}_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2}\dot{x}_2 = 2x_1x_2 + 2x_2(-x_1 - x_2) = -2x_2^2 \le 0$$

容易验证，除$x_1(0) = 0 = x_2(0) = 0$，任意非零初始状态下的解均不恒为零，故dv/dt不恒为零，系统渐近稳定。

定理7-20*	$v(x)>0$	$\dot{v} \le 0$		**稳定**
定理7-21*	$v(x)>0$	$\dot{v} < 0$		**渐近稳定**
定理7-22**	$v(x)>0$	$\dot{v} \le 0$	**不恒为零**	**渐近稳定**

定理7-23* 若有一个$v(x)$, 满足

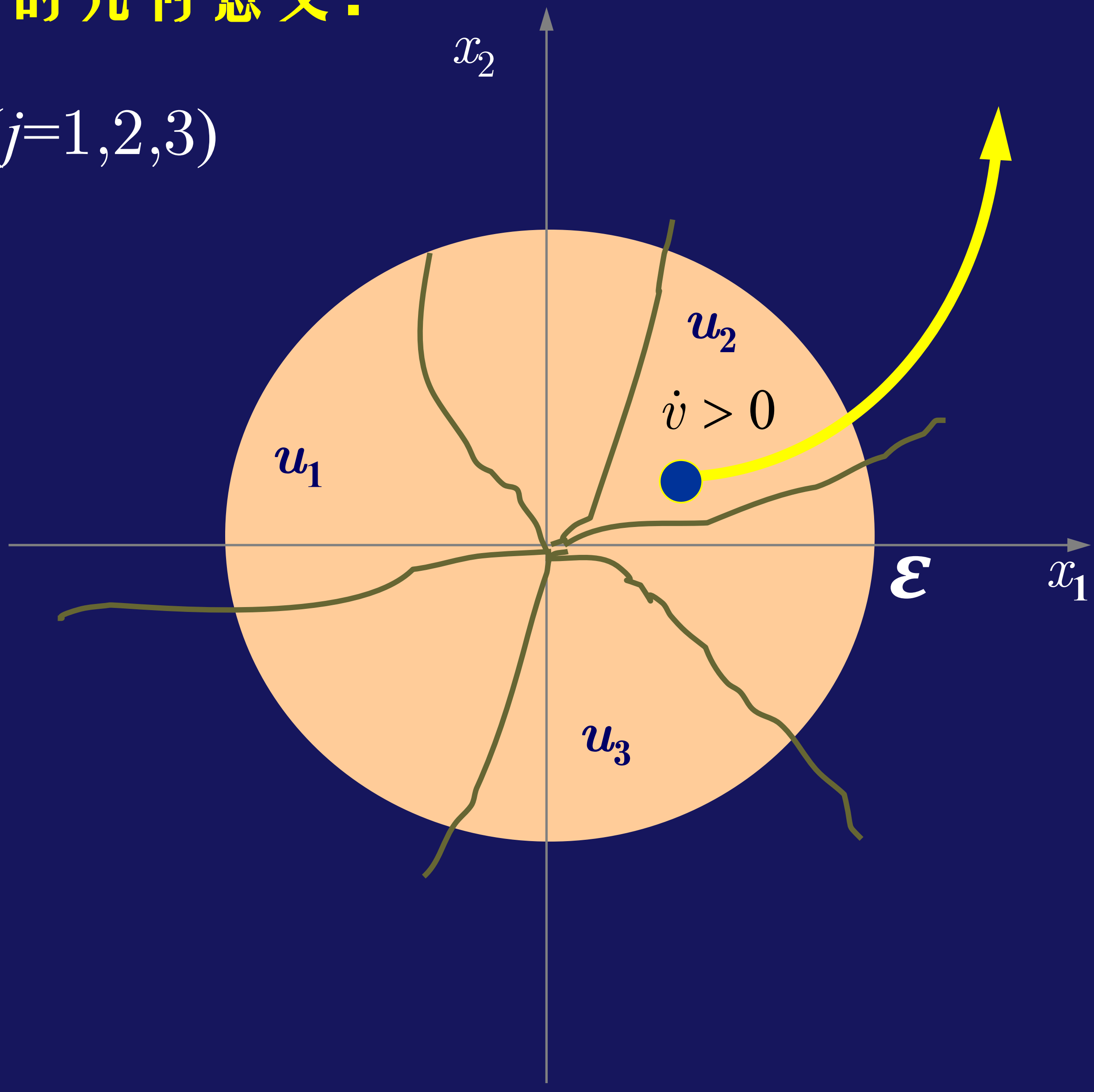
(1)在原点的某个邻域 $\| x \| < \varepsilon$ 内，存在$v>0$的区域，这种区域可能包含若干个子区域 u_j 。 u_j的边界是由$v=0$和 $\| x \| = \varepsilon$ 所组成。

(2) 在某个子区域，v 沿（7-39）解的导数 $\dot{v} > 0$,

则（ 7-39）的零解是不稳定的。

定理7-23*的几何意义：

$v>0$：　$\boldsymbol{u}_j\ (j=1,2,3)$



非线性系统一次近似的合理性结果

结论：

1. 如果线性化系统的所有特征值均负实部，则原非线性系统原点为渐近稳定的。

2. 如果线性化系统至少有一个特征值有正实部， 则原非线性系统的原点是不稳定的。

3. 如果非线性系统的线性化系统有零实部特征值，其余特征值实部为负，则原非线性系统的原点稳定性取决于高阶项，既可能稳定也可能不稳定。

例： 考虑如下非线性系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - x_1 x_2^2 \end{cases}$$

研究其平衡状态$x_1 = 0, x_2 = 0$的稳定性。

已经知道：其线性化系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases}$$

是渐近稳定。再利用线性化系统近似的合理性结果知，原来的非线性系统的原点是渐近稳定的。

三、线性系统二次型 v 函数

定理7-25 时不变动态方程 $\dot{x} = \mathrm{A}x$ 是渐近稳定的充分必要条件是对给定的**任一个正定对称阵N**，都存在**唯一的正定对称阵M**，使得

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{M} + \mathbf{M}\mathbf{A} = -\mathbf{N} \qquad （7—44）$$

为什么要研究这个问题？

证明：充分性： 若对任给正定对称阵**N**，都存在唯一的正定对称阵**M**，使(7-44)成立，要证明系统渐近稳定。为此，构造 $Lyapunov$ 函数：

$$v(x) = x^T \mathbf{M} x \qquad \mathbf{A}^T\mathbf{M} + \mathbf{M}\mathbf{A} = -\mathbf{N} \quad (7\text{-}44)$$

对其沿方程的解求微分，有

$$\dot{v} = x^T(\mathbf{A}^T\mathbf{M} + \mathbf{M}\mathbf{A})x = -x^T\mathbf{N}x < 0$$

由定理7-21*知零解渐近稳定。

必要性： 要证明若dv/dt=$\mathbf{A}x$渐近稳定，则对任意给定的对称正定阵**N**，有唯一的正定对称阵**M**存在，使得(7-44)成立。为此，考虑矩阵微分方程

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^T\mathbf{X}+\mathbf{X}\mathbf{A}, \quad 且令\mathbf{X}(0)=\mathbf{N} > 0$$

不难验证其解为

$$\mathbf{X} = e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{N}e^{\mathbf{A}\mathbf{t}}$$

对

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^T\mathbf{X}+\mathbf{X}\mathbf{A}, \quad \mathbf{X}(0)=\mathbf{N} > 0$$

积分并注意到系统渐近稳定的假设， 有

$$\mathbf{X}(\infty) - \mathbf{X}(0) = \mathbf{A}^T(\int_0^\infty \mathbf{X}dt) + (\int_0^\infty \mathbf{X}dt)\mathbf{A}$$

$$(\because \operatorname{Re}\lambda(\mathbf{A}) < 0, \mathbf{X}(\infty) = 0)$$

$$\Rightarrow -\mathbf{N}=\mathbf{A}^T(\int_0^\infty \mathbf{X}dt) + (\int_0^\infty \mathbf{X}dt)\mathbf{A}$$

令

$$\mathbf{M}=\int_0^\infty \mathbf{X}dt=\int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{N}e^{\mathbf{At}}dt,$$

首先，易于验证它是正定对称阵

$$\mathbf{M}^T=\mathbf{M};$$

其次，注意到

$$x^T\mathbf{M}x=x^T\int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{N}e^{\mathbf{At}}dt\,x=\int_0^\infty (e^{\mathbf{A}t}x)^T\mathbf{N}(e^{\mathbf{At}}x)dt$$

且$(e^{\mathbf{A}t}x)^T\mathbf{N}(e^{\mathbf{A}t}x)>0\forall x\neq 0$。又由于**A**阵均具负实部，故积分有界，**M**必正定。因此方程(7-44)成立。提示：记$\left\|e^{\mathbf{A}t}\right\|\leq \alpha_1 e^{-\alpha_2 t}$

M阵的唯一性：

$$\mathbf{A}^{T}\mathbf{M}+\mathbf{MA}=-\mathbf{N}$$

是特殊的$Sylvester$方程，其有唯一解的充分必要条件是A与F=-A的转置没有相同的特征根。

由于A是渐近稳定的，有负实部特征根。显然满足条件。故M阵唯一。

证完。

几点说明：

1. 矩阵方程（7—44）给出了构造这个二次型v函数的具体途径，在指定正定对称的**N**阵后可求解（7-44）所定义的$(1/2)n(n+1)$个未知量的代数方程组。定理的结论表明**A**若是渐近稳定时，这个代数方程组有唯一解存在;

2. 在求解（7—44）时比较简单的是取**N**为单位阵;

3. 当**A**中含有未确定参数时，可以先指定一个**N**阵，而后解（7—44）所确定的代数方程组，从而得到**M**阵，用$Sylvester$ 定理写出**M**阵正定的条件，这样就可得到系统稳定时，**A**中的待定参数应满足的条件。**应当指出，这些待定参数应满足的条件是和N阵的选择无关的。**

4. 需要引起注意的是，定理7-25并不意味着以下命题成立，即

“A渐近稳定，M正定，由（7—44）式所得的N一定正定。”

例7— 10

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix},\qquad \mathbf{M}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{bmatrix}$$

显然**A**的特征值均有负实部，**M**正定，但按（7—44）计算出的

$$\mathbf{N}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 2 & 26\end{bmatrix}$$

却不是正定的。

定理7-26 若定理7-25（7-44）中的N取为**半正定对称阵**，且有$x^{\mathrm{T}}\mathbf{N}x$沿 $\dot{x}=\mathbf{A}x$的任意非零解**不恒为零**，则矩阵方程

$$\mathbf{A}^{T}\mathbf{M}+\mathbf{M}\mathbf{A}=-\mathbf{N} \qquad (7\text{-}46)$$

有正定对称解的充分必要条件为$\dot{x}=\mathbf{A}x$ 渐近稳定。

注：关于定理7-26

“$x^{\mathrm{T}}\mathbf{N}x$沿方程的非零解不恒为零”的条件不能少。

例1： A渐近稳定，N半正定，不能保证M正定

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{N}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad \mathbf{M}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

1. 这是因为$x^{\mathrm{T}}\mathbf{N}x$沿方程的非零解恒为零。事实上，容易算出

$$x^T\mathbf{N}x \equiv 0 \Rightarrow x_1 \equiv 0。$$

但此时

$$x_2 = e^{-t}x_{20}(因为x_1 \equiv 0)$$

若

$$x_{20} \neq 0 \Rightarrow x_2 \neq 0 \Rightarrow x是非零解。$$

这说明$x^T\mathbf{N}x$沿方程的非零解恒为零，不满足定理条件。

2. 若将N分解为 $\mathbf{N}=[1\ \ 0]^{\mathrm{T}}[1\ \ 0]:=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}$，则易于验证(**A**，**C**)不可观测。

例2. **N**半正定，**M**正定，不能保证**A**渐近稳定。

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{N}=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\quad \mathbf{M}=\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

分 析： 1. 考察 $x^{\mathrm{T}}\mathbf{N}x=0$：

$$x_1=e^{-0.5t}x_{10},\quad x_{10}=0\Rightarrow x_1\equiv 0\,;$$

$$x_2=x_{20},\qquad x_{20}\neq 0,$$

但 $x^{\mathrm{T}}\mathbf{N}x=x_1^2$，故$x^{\mathrm{T}}\mathbf{N}x=x_1^2$恒为零，即沿非零解恒为零。

2. 令$\mathbf{C}=[1\ \ 0]$, $\mathbf{N}=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}$, 可知($\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$)不可观测。

例3：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix},\ \mathbf{N}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\ \mathbf{M}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$x(t)=e^{\mathbf{A}t}x(0)=\begin{bmatrix}e^{-t} & te^{-t}\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}x(0)$$

$x^{\mathrm{T}}\mathbf{N}x$沿方程的非零解不恒为零，这时(**A**, **C**)可观测，定理满足。

结 论： “$x^T\mathbf{N}x$沿方程的非零解不恒为零，”可用(**A**, **C**)可观测代替，这里$\mathbf{N}=\mathbf{C}^T\mathbf{C}$。进而，我们有：

定理7-26* 时不变动态方程 $\dot{x}=\mathbf{A}x$ 的零解渐近稳定的充分必要条件是在给定（**A**, **N**)为可观测的半正定阵**N**下， *Lyapunov*方程(7-44)

$$\mathbf{A}^T\mathbf{M}+\mathbf{M}\mathbf{A}=-\mathbf{N} \quad （7—44）$$

有唯一正定解**M**。

关于定理的证明：

1) 因为**N**为半正定矩阵，总可以将其分解为

$$\mathbf{N}=\mathbf{C}^T\mathbf{C}$$

的形式。**易证：(A, N)可观测等价于(A, C)可观测。**

2) **必要性证明：**类似于定理7-25：由系统零解已渐近稳定，则任给使(**A**，**N**)可观测的半正定阵**N**，由积分

$$\mathbf{M}=\int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{N}e^{\mathbf{A}t}dt=\int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t}\mathbf{C}^T\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}dt$$

确定的矩阵**M**必满足(7-44)且为正定（可观测性*Gram*矩阵），并且这个解是唯一的。

3) 充分性证明：若在给定（A, N)为可观测的半正定阵N下，方程(7-44)的解M为正定，要证此时系统必定渐近稳定。为此，考虑$v(x)=x^{\mathrm{T}}\mathbf{M}x \Rightarrow dv/dt = -x^{\mathrm{T}}\mathbf{N}x$。因此，只要证明$x^{\mathrm{T}}\mathbf{N}x\equiv 0 \Rightarrow x_0\equiv 0$即可。

$$x^T\mathbf{N}x = x^T\mathbf{C}^T\mathbf{C}x = 0 \Rightarrow \mathbf{C}x = 0 \Leftrightarrow \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}x_0 = 0 \quad (*)$$

$$\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}x_0\,|_{t=0} = \mathbf{C}x_0 = 0$$

微分（*）式，有

$$\mathbf{CA}e^{\mathbf{A}t}x_0 = 0 \Rightarrow \mathbf{CA}e^{\mathbf{A}t}x_0\,|_{t=0} = \mathbf{CA}x_0 = 0$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\mathbf{CA}^{n-1}x_0 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} x_0 = 0 \Rightarrow x_0 \equiv 0$$

这说明使 $x^T \mathbf{N} x \equiv 0$ 的x是零解，即沿方程的非零解dv/dt不恒为零。由定理7-21**，系统必渐近稳定。 **证完。**

四、关于$Lyapunov$ 函数

1. 不通过求解微分方程而能对系统的稳定性作出结论的标量函数称作系统的一个$Lyapunov$函数；

2. 如何构造v函数是一个复杂的问题。即使满足某系统的 v 函数理论上存在，要找到其解析的表达式仍非易事。**构造 v 函数的一般方法是不存在的。**但对于线性系统，存在一些构造 v 函数的方法。

3. 应当特别注意定理7-20*—7-22**均为**充分条件**。这意味，即便我们不能构造出满足系统稳定的v函数，也不能因此断言系统不稳定。要证明系统不稳定，须找出满足不稳定定理的v函数（参见高为炳《运动稳定性基础》）；

4. 本节对线性系统介绍了构造二次型Lyapunov函数的方法，即定理7-25、定理7-26及定理7-26*，是基于以下考虑：

- 介绍Lyapunov方程(7-44)：

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}+\mathbf{M}\mathbf{A}=-\mathbf{N},$$

  这是线性系统理论中很多问题要涉及的方程；

- 线性系统的Lyapunov函数经过一些变动后，往往可以得到对一类非线性系统合适的 v 函数;

- v 函数不仅用于研究稳定性，更重要地，是控制律设计的基础;

- 有时我们会说找到了一个更好的Lyapunov函数，是指它在用于评价系统时有较少的保守性，或用于系统设计时可以得到更好的结果；

5. 对时变的函数$v(x, t)$，除了前述符号的要求之外(定号函数的定义也异于$v(x)$)，定理也和定常情况不同，应用有关稳定性定理时要特别注意“具无穷小上界”(1)或“K类函数界”(2)的要求。

作业：P213，7-12，7-14，7-16， 7-21

愿大家考出好的成绩！更希望大家真正掌握了这些知识点为以后的研究工作打下好的基础！