第二讲 基本概念（续）

2. t_0时刻是松弛线性系统的判断

定理1—1 由下式描述的系统

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

在t_0是松弛的，必要且只要 $\mathbf{u}_{[t_0,+\infty)} \equiv 0$ 隐含着 $\mathbf{y}_{[t_0,+\infty)} \equiv 0$。

下面的推论将给出判断t_0松弛的一个实用条件。

推论1—1 若系统脉冲响应阵$\mathbf{G}(t,\tau)$可以分解成

$$\mathbf{G}(t,\tau)=\mathbf{M}(t)\mathbf{N}(\tau)$$

且 $\mathbf{M}(t)$ 中每一个元素在 $(-\infty,+\infty)$ 上是**解析的**(注1)，

则系统在t_0松弛的一个充分条件是对于某个固定的正数ε，$\mathbf{u}_{[t_0,t_0+\varepsilon)}\equiv 0$意味着 $\mathbf{y}_{[t_0,t_0+\varepsilon)}\equiv 0$ 。

注： 由于ε只是一个固定的正数，故推论较定理1-1在工程意义上是可以操作的。

例： 考虑系统 $u \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y_c$

若

$$y_c(t)=\int_{t_0}^{t} G(t,\tau)u(\tau)d\tau=\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau,\forall t\in[t_0,+\infty)$$

利用矩阵指数的性质，$\mathbf{G}(t,\tau)$ 可分解成

$$\Rightarrow G(t,\tau)=M(t)N(\tau)=e^{\mathbf{A}t}e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B},\quad \forall t\in[t_0,+\infty)$$

这里，$\mathbf{M}(t)=e^{\mathbf{A}t}$ 是解析函数。

3. 复习：实变量解析函数

定义： $f(t)$称为在(a,b)上是解析的，若$f(t)$在该区间具有任意阶的连续导数，且对于(a,b)中任一点t_0，存在一个ε_0，使得对$(t_0-\varepsilon_0, t_0+\varepsilon_0)$中所有$t$，$f(t)$可表示成$t_0$处的泰劳级数:

$$f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(t-t_0)^n}{n!}f^{(n)}(t_0)$$

例： 多项式、指数函数、正弦函数等均是实数域上的解析函数。

定理： 若函数f在开区间**D**上解析，已知f在**D**中任意小的非零区间上恒为零，则函数在**D**上恒为零。

（利用所谓解析开拓的方法可以证明）

推论1—1 若系统脉冲响应阵 $\mathbf{G}(t,\tau)$ 可以分解成

$$\mathbf{G}(t,\tau)=\mathbf{M}(t)\mathbf{N}(\tau)$$

且 $\mathbf{M}(t)$ 中每一个元素在 $(-\infty,+\infty)$ 上是**解析的**，

则系统在 t_0 松弛的一个充分条件是对于某个固定的正数 ε，$\mathbf{u}_{[t_0,t_0+\varepsilon)}\equiv 0$ 意味着 $\mathbf{y}_{[t_0,t_0+\varepsilon)}\equiv 0$ 。

推论的证明： 只要证明由 $\mathbf{u}_{[t_0,\infty)} \equiv 0$ 意味着 $\mathbf{y}_{[t_0,\infty)} \equiv 0$，即

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{M}(t)\int_{-\infty}^{t_0} \mathbf{N}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau = 0, \forall t \ge t_0$$

就可以了。为此，令 $\mathbf{u}_{[t_0,\infty)} \equiv 0$ ，则

$$\mathbf{y}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{t_0} \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$= \mathbf{M}(t)\int_{-\infty}^{t_0} \mathbf{N}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

因 $u_{[t_0,\infty)} = 0 \Rightarrow u_{[t_0,t_0+\varepsilon)} = 0 \Rightarrow y_{[t_0,t_0+\varepsilon)} = 0 \Rightarrow$

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{M}(t)\int_{-\infty}^{t_0}\mathbf{N}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau=0, \forall t\in[t_0,t_0+\varepsilon)$$

由于 $$\int_{-\infty}^{t_0}\mathbf{N}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau:=\mathbf{c}$$

是一个常向量，则由$\mathbf{M}(t)$为解析函数的假设蕴涵$\mathbf{y}(t)$在 $[t_0,+\infty)$ 也是解析的。又由假设，$\mathbf{u}_{[t_0,t_0+\varepsilon)}\equiv 0$ 可推得 $\mathbf{y}_{[t_0,t_0+\varepsilon)}\equiv 0$，于是由上式

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{M}(t)\mathbf{c}\equiv 0, \forall t\in[t_0,t_0+\varepsilon) \quad (A.2)$$

再由解析开拓的原理知：

$$\mathbf{y}(t) \equiv 0 \forall t \geq t_0 \Leftrightarrow \mathrm{M}(t) \int_{-\infty}^{t_0} \mathrm{N}(\tau)\mathrm{u}(\tau)d\tau \equiv 0 \forall t \geq t_0$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{t_0} \mathrm{G}(t,\tau)\mathrm{u}(\tau)d\tau \equiv 0, \forall t \in [t_0, +\infty)$$

即 $\mathbf{u}_{[t_0,\infty)} \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{y}_{[t_0,\infty)} \equiv 0$。

证完。

例： 设系统描述如下：

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

其中A、B均为适当维数的常量矩阵。其解为

$$\mathbf{x}(t) = \underbrace{e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0)}_{\int_{-\infty}^{t_0}} + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

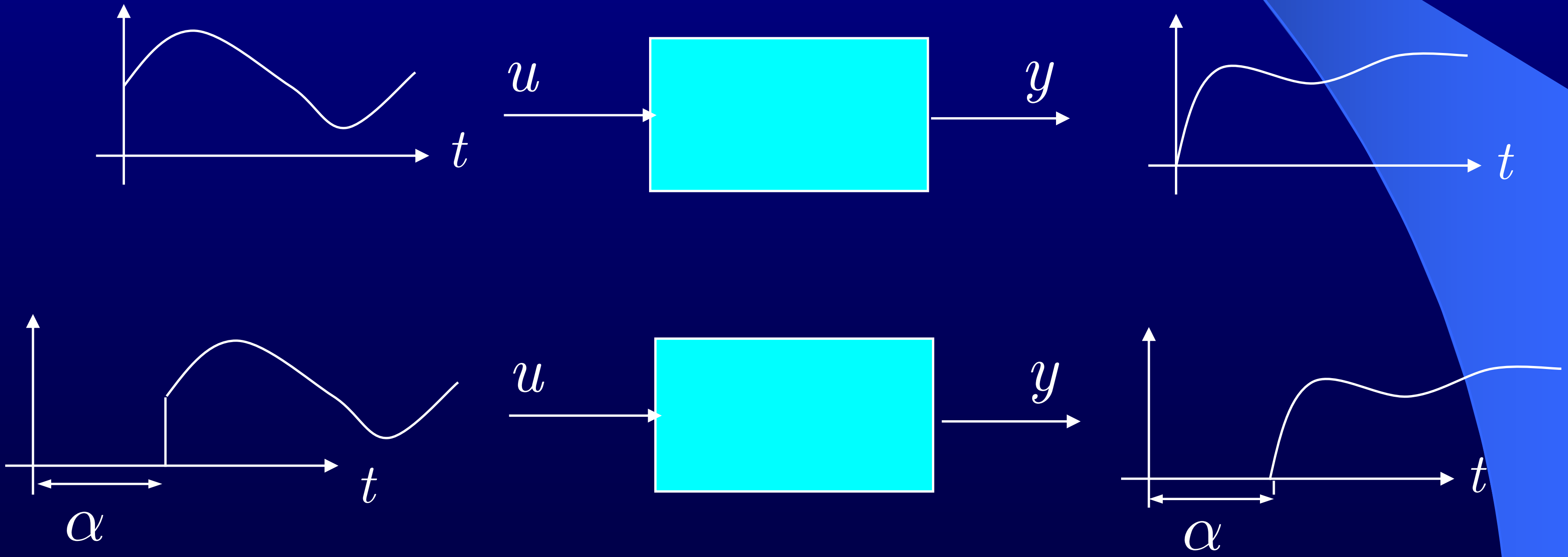
$$= e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

若$\mathbf{x}(t_0)=0$，即系统在t_0时刻的储能为零，则系统是t_0时刻松弛的，此时

$$\mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad \text{蕴涵} \qquad u_{[t_0,+\infty)} \equiv 0 \Rightarrow \mathbf{X}_{[t_0,+\infty)} \equiv 0$$

六、时不变性

一个松弛的时不变线性系统的特性：输入信号延迟α秒，其响应也恰好延迟α秒，且**波形不变**，即系统特性不随时间而变化。



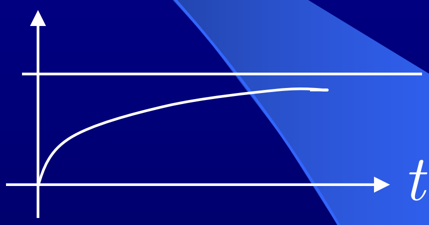
例： 考虑在零时刻松弛的线性系统

$$\dot{y} = -y + u, \quad y(0) = 0$$

试讨论当$u=\mathbf{1}(t)$ 及 $u=\mathbf{1}(t-1)$ 时系统响应的特性。

- $u=\mathbf{1}(t)$时的系统响应：

$$y(t) = 1 - e^{-t}, t \ge 0$$

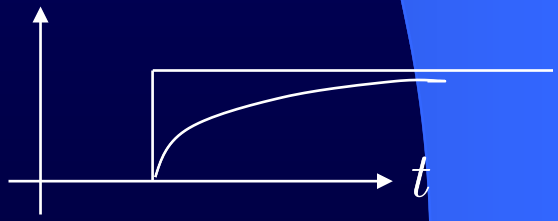


- $u=\mathbf{1}(t-1)$ 时系统响应：根据 *Laplace* 变换

$$Y(s) = \frac{1}{s+1}\frac{1}{s}e^{-s} = \frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{s+1}e^{-s}$$

故

$$y(t) = \mathbf{1}(t-1) - e^{-(t-1)}, t \ge 1$$



1. 位移算子和时不变系统的定义

首先介绍位移算子Q_α 的概念。

位移算子Q_α 的作用效果如图1—5所示。经Q_α 作用后的输出等于延迟了 α 秒的输入（输入和输出的波形一样，但输出延迟了α 秒）。

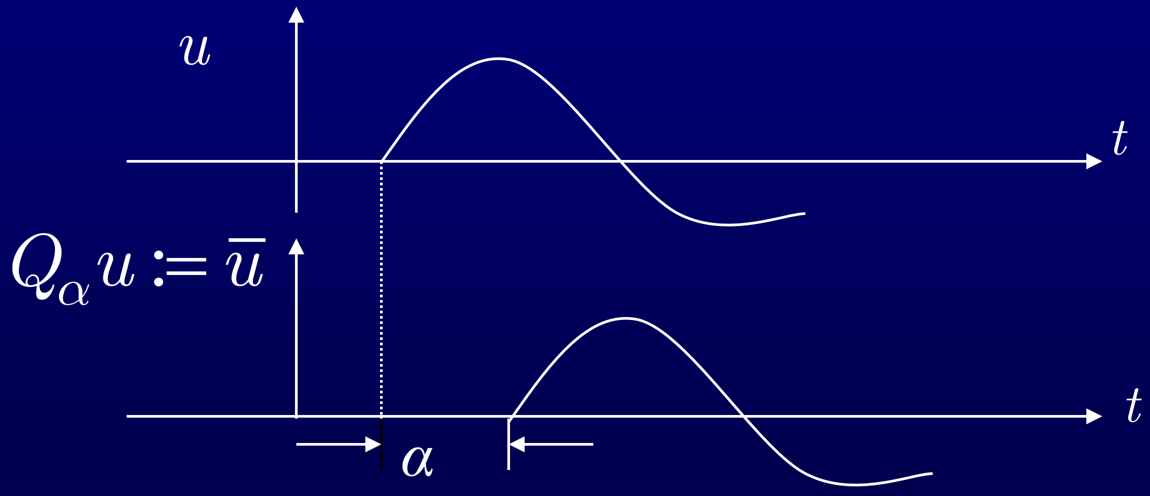


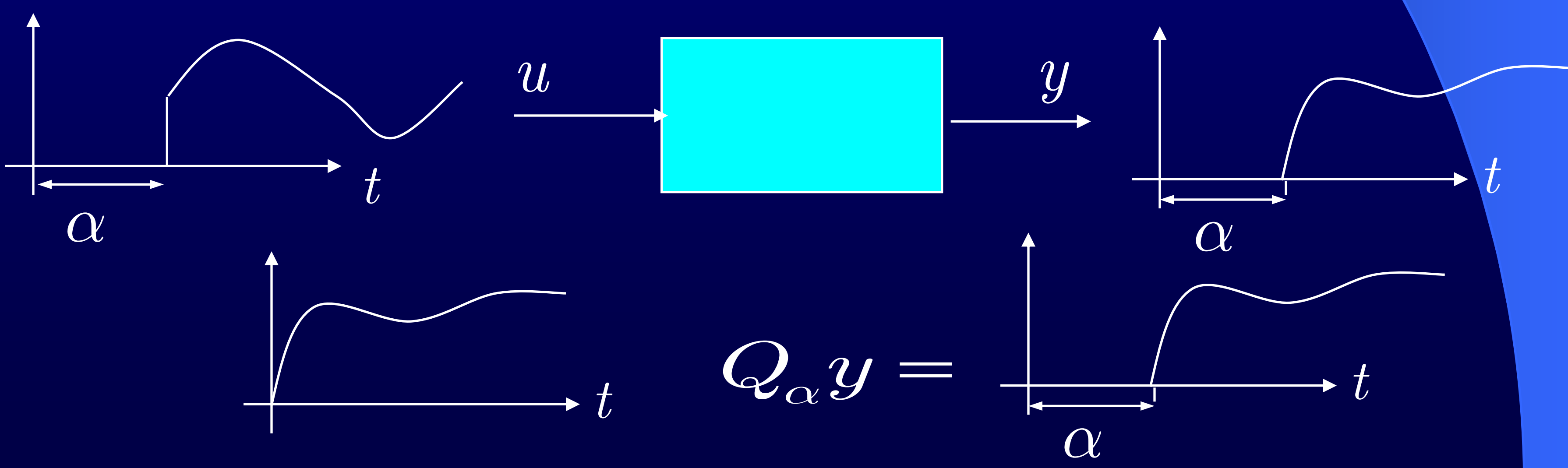
图1—5

定义1—4 松弛系统称为时不变的，当且仅当对于任何输入u 和**任何**实数α ，有

$$Q_\alpha y = Q_\alpha H u = H Q_\alpha u \qquad (1-18)$$

成立。否则称为时变的。

上式中右端=左端，恰恰反映了时不变系统的特性：输入信号延迟α 秒，其响应也恰好延迟α 秒。



例：试证：对于固定的α，位移算子Q_α是一个线性时不变系统，并求它的脉冲响应函数和传递函数。

证明： Q_α的线性性为显然。根据定义，只要证明对于任意的实数β，都有

$$Q_\beta Q_\alpha u = Q_\alpha Q_\beta u$$

即可。事实上，

$$Q_\beta Q_\alpha u = Q_\beta u(t-\alpha) = u(t-\alpha-\beta)$$
$$= Q_\alpha u(t-\beta) = Q_\alpha Q_\beta u$$

故系统是一个线性时不变系统。脉冲响应函数：

$$Q_\alpha \delta(t-\tau) = \delta(t-(\tau+\alpha))$$

响应的传递函数为

$$\mathcal{L}[\delta(t-(\tau+\alpha))] = e^{-(\tau+\alpha)s}$$

2. 时不变系统的脉冲响应函数

对线性松弛系统，若又具有时不变性，则脉冲响应函数具有更简单的形式：

$$g(t,\tau) = H\delta(\xi-\tau) = g(t-\tau,0)$$

实际上，根据时不变性有：

$$Q_\alpha g(t\,,\tau) = Q_\alpha H\delta(\xi-\tau) = HQ_\alpha\delta(\xi-\tau)$$

右边= $H\delta[\xi-(\tau+\alpha)] = g(t\,,\tau+\alpha)$

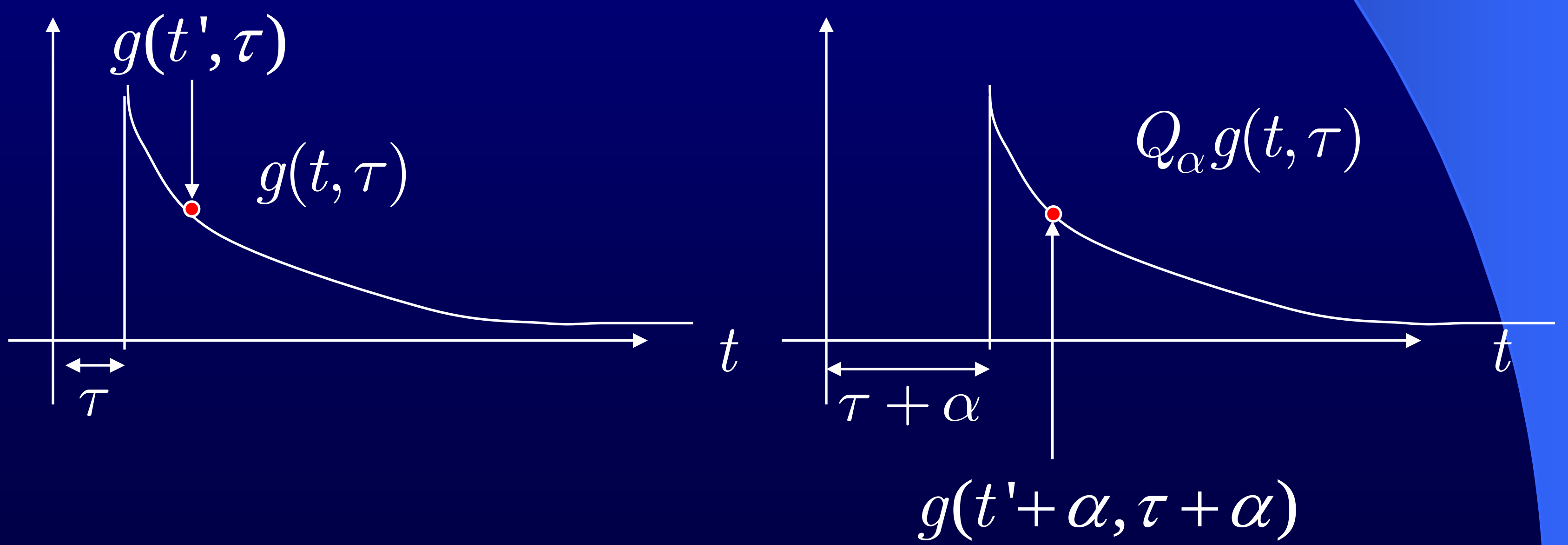
左边= $Q_\alpha g(t\,,\tau) = g(t-\alpha\,,\tau)$

左边＝右边：　$g(t-\alpha\,,\tau) = g(t\,,\tau+\alpha)$

这意味对于任何的 t、τ、α 都有

$$g(t,\tau)=g(t+\alpha,\tau+\alpha)$$

这恰恰是时不变的特性：输入信号延迟α 秒，响应也恰好延迟α 秒。



特别，如取 $\alpha=-\tau$ 就可得

$$g(t,\tau)=g(t-\tau,0) \qquad \forall t,\tau$$

为了方便起见，今后把 $g(t-\tau,0)$ 记为 $g(t-\tau)$：

$$g(t,\tau)=g(t-\tau) \qquad \forall t,\tau$$

上式左边说明，系统的脉冲作用时刻τ，观测时刻为t；而左边等于右边表明，对时不变系统来说，脉冲响应仅取决于观测时刻 t 与脉冲作用时刻τ 的差。

例： 如下的松弛、因果、线性时不变系统：

$$\dot{g}+g=\delta(t-\tau), g(0)=0, \quad \tau\geq 0$$

$$g(t,\tau)=e^{-(t-\tau)}=g(t-\tau), t\geq\tau$$

3. 推广到多变量系统

对于所有的t 和τ 有

$$\mathbf{G}(t,\tau)=\mathbf{G}(t-\tau,0)=\mathbf{G}(t-\tau)$$

因而具线性、时不变性，在t_0时刻松驰的因果系统，其输入—输出对满足

$$\mathbf{y}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{G}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (1-19)$$

在时不变的情况下，不失一般性，总可选零作为初始时刻t_0，即 t_0=0 是开始向系统提供输入$\mathbf{u}$的时刻，这时（1—19）式就变成下列卷积积分的形式：

$$\mathbf{y}(t)=\int_0^t \mathbf{G}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (1-20)$$

例： 系统

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u},\mathbf{x}(0)=0,\mathbf{x}\in\mathbf{R}^n,\mathbf{u}\in\mathbf{R}^p$$

是一个在零时刻松弛的线性时不变系统。事实上，微分方程的解为

$$\mathbf{x}(t)=\int_0^t \underbrace{e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}}_{\mathbf{G}(t-\tau)}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

七、传递函数阵和它的极点多项式

1. 传递函数阵：对以下时不变系统进行拉氏变换：

$$\mathbf{y}(t)=\int_0^t \mathbf{G}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (1-20)$$

记 $\mathbf{Y}(s)=\mathcal{L}[\mathbf{y}(t)]=\int_0^\infty \mathbf{y}(t)e^{-st}dt$

由拉氏变换的卷积定理，可得

$$\mathbf{y}(s)=\mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s) \qquad (1-22)$$

式中

$$\mathbf{G}(s)=\int_0^\infty \mathbf{G}(t)e^{-st}dt$$

是脉冲响应阵的拉氏变换，称为系统的**传递函数阵**。

例： 已知系统的脉冲响应矩阵

$$\mathbf{G}(t)=\begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-t}\cos t \\ \sin t & e^{-5t} \end{bmatrix}$$

求所对应的传递函数阵。

解： 直接对各元素进行 $Laplace$ 变换得到：

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{s+1}{(s+1)^2+1} \\ \dfrac{1}{s^2+1} & \dfrac{1}{s+5} \end{bmatrix}$$

2. 正则与严格正则：

定义：一个有理传递矩阵$\mathbf{G}(s)$称为是正则的，若 $\mathbf{G}(\infty)$ 是一个非零的常量矩阵。$\mathbf{G}(s)$称为是严格正则的，若 $\mathbf{G}(\infty)=0$ 。

3. 传递矩阵的零点和极点：

假设： $\mathbf{G}(s)$是$q\times p$ 有理函数阵，且$\text{rank}\mathbf{G}(s)=r$。

例： 考虑如下几个传递函数阵：

$$\mathbf{G}_1(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_2(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1} \\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{2}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_3(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{-1}{s+1} \\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$rank(\mathbf{G}_1)=1$$

$$rank(\mathbf{G}_2)=2$$

$$rank(\mathbf{G}_3)=2$$

定义1—5 $\mathbf{G}(s)$所有不恒为零的**各阶子式**的首一最小公分母称为$\mathbf{G}(s)$的极点多项式。极点多项式的根称为$\mathbf{G}(s)$的极点。

例： 若

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 & \dfrac{s-1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-1}{s-1} & \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

计算出$G(s)$的一阶子式的公分母为，$(s+1)(s-1)(s+2)$
而$\mathbf{G}(s)$的三个二阶子式分别为（**要写成既约形式！**）

$$\frac{1}{(s+1)(s+2)} \qquad \frac{-(s-1)}{(s+1)(s+2)^2} \qquad \frac{2}{(s+1)(s+2)}$$

二阶子式的公分母为 $(s+1)(s+2)^2$。

因此$\mathbf{G}(s)$的极点多项式为 $(s+1)(s-1)(s+2)^2$

$\mathbf{G}(s)$有四个极点，为-1、 -2、 -2和$+1$。

定义1－6 $\mathbf{G}(s)$的**所有r 阶子式**，在其分母取$\mathbf{G}(s)$的极点多项式时，其分子多项式的首一最大公因式称为$\mathbf{G}(s)$的零点多项式。零点多项式的根称为$\mathbf{G}(s)$的零点。

例: 若

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & 0 & \dfrac{s-1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-1}{s-1} & \dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

极点多项式

$$(s+1)(s-1)(s+2)^2$$

其三个二阶子式在分母取成极点多项式时分别为

$$\frac{(s+2)(s-1)}{(s+1)(s-1)(s+2)^2} \qquad \frac{-(s-1)^2}{(s+1)(s-1)(s+2)^2} \qquad \frac{2(s-1)(s+2)}{(s+1)(s-1)(s+2)^2}$$

它们分子的最大公因式为（s–1），因此$\mathbf{G}(s)$的零点多项式为（s–1），　$\mathbf{G}(s)$有一个零点s=1。

例： 考虑如下传递矩阵：

$$\mathbf{G}_1(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix} \qquad \mathbf{G}_2(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1.0001}{s+1} & \dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

分别求它们的极点多项式。

$\mathbf{G}_1(s)$的四个一阶子式分别是：

$$\frac{1}{s+1} \quad \frac{1}{s+1} \quad \frac{1}{s+1} \quad \frac{1}{s+1}$$

其二阶子式恒为零。故其极点多项式是$s+1$。

$\mathbf{G}_2(s)$的四个一阶子式分别是：

$$\frac{1.0001}{s+1} \quad \frac{1}{s+1} \quad \frac{1}{s+1} \quad \frac{1}{s+1}$$

其二阶子式为

$$\frac{0.0001}{(s+1)^2}$$

故其极点多项式是$(s+1)^2$。

例:若

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+3)} \\ \dfrac{-1}{s+1} & \dfrac{1}{(s+2)} & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix}$$

求它的极点多项式、零点多项式和零极点。

线性系统状态方程

系统的状态变量描述

一、状态变量的定义

输入—输出描述　**松 弛** 。 $\mathbf{y}_{[t_0,+\infty)} = \mathbf{H}\mathbf{u}_{[t_0,+\infty)}$

$$\dot{y}_c = -\frac{1}{\tau} y_c + u \qquad t \geq t_0 = 0$$

容易得到其解

$$y_c(t) = e^{-\frac{1}{\tau}t} y_c(0) + \int_0^t e^{-\frac{1}{\tau}(t-\tau)} u(\tau) d\tau$$

显然，若其初始条件$y_c(0) \neq 0$，则不能由输入唯一地确定其输出。

定义1—7 能和 $\mathbf{u}_{[t_0,+\infty)}$ 一起唯一地确定系统在所有 $t \geqslant t_0$ 时的行为的系统 t_0 时刻的信息量,称为系统在 t_0 时刻的**状态。**

1. t_0时刻状态足以和$\mathbf{u}_{[t0,+\infty)}$一起确定**输出**和**信息量本身的更新**。

2. 随时间$t \geqslant t_0$ 不断更新的信息量称为**状态变量**，以状态变量为元素构成的向量称为**状态向量**，记为:

$$\mathbf{X}(t) = \left[x_1(t) \cdots \quad x_i(t) \quad \cdots \quad x_n(t)\right]^T \in \mathbf{R}^n, \quad t \geq t_0$$

例： 考虑t_0时刻非松弛系统：$\ddot{y}+\alpha_1\dot{y}+\alpha_2 y=u(t), t\geq t_0$

信息量取$y(t_0)$ 不全面；取$y(t_0)$ 、$\dot{y}(t_0)$ 、$\ddot{y}(t_0)$ 多余。因此，可取 t_0 时刻的状态为：

$$\mathbf{x}(t_0)=\begin{bmatrix} y(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{bmatrix}\in\mathbf{R}^2$$

相应的状态变量就是

$$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}\in\mathbf{R}^2, t\geq t_0$$

可见，尽管这是一个SISO系统，要获得系统的全面信息，仅知道$y(t)$是不够的。

例1—4 (状态变量的不唯一性）考虑二阶系统：

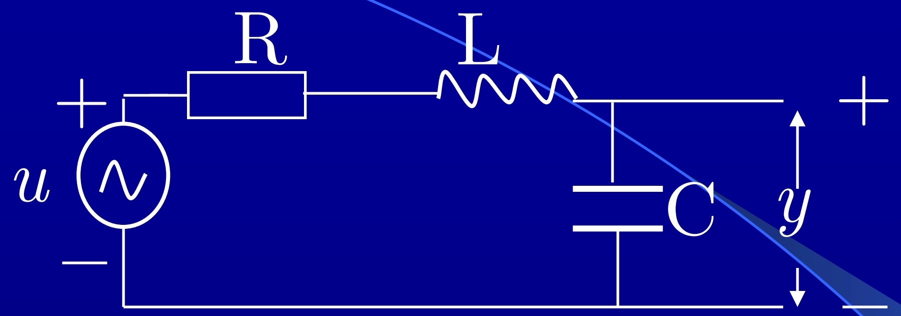


图1—5

其中，R=3Ω，L=1H，C=0.5F。由复数阻抗法容易求出传递函数：

$$\frac{y(s)}{u(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}=\frac{2}{(s+1)(s+2)}=\frac{2}{s+1}-\frac{2}{s+2}$$

相应的脉冲响应函数为

$$g(t)=2e^{-t}-2e^{-2t}$$

➢在 t_0 松弛的情况下，输入—输出的关系式为

$$y(t)=\int_{t_0}^{t} g(t-\tau)u(\tau)d\tau, \quad t \geq t_0$$

➢在 t_0 非松弛的情况下，输入—输出的关系式为

$$y(t)=\underbrace{\int_{-\infty}^{t_0} g(t-\tau)u(\tau)d\tau}_{\mathrm{I}}+\underbrace{\int_{t_0}^{t} g(t-\tau)u(\tau)d\tau}_{\mathrm{II}}$$

(1) 第一种选取状态的方法：**根据定义**

I：$u_{(-\infty,t_0)}$ 对 $t \geq t_0$时输出 $y(t)$ 产生的影响：

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

$$= 2e^{-t}\underbrace{\int_{-\infty}^{t_0} e^{\tau}u(\tau)d\tau}_{x_1(t_0)} - 2e^{-2t}\underbrace{\int_{-\infty}^{t_0} e^{2\tau}u(\tau)d\tau}_{x_2(t_0)}$$

$$= 2e^{-t}x_1(t_0) - 2e^{-2t}x_2(t_0)$$

若$x_1(t_0)$、$x_2(t_0)$ 已知，由 u 可唯一确定系统的响应：

I+II：

$$y(t)=2e^{-t}x_1(t_0)-2e^{-2t}x_2(t_0)+\int_{t_0}^{t} g(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

在时刻t_0补充的信息量完全可以取$x_1(t_0)$和$x_2(t_0)$ 而状态变量为：

$$\begin{cases} x_1(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{\tau}u(\tau)d\tau = x_1(t_0)+\int_{t_0}^{t} e^{\tau}u(\tau)d\tau \\ x_2(t)=\int_{-\infty}^{t} e^{2\tau}u(\tau)d\tau = x_2(t_0)+\int_{t_0}^{t} e^{2\tau}u(\tau)d\tau \end{cases} \quad \forall t \ge t_0$$

(2) 第二种选取状态变量的方法：**根据物理意义**

$y(t)$： 电容两端的电压

$y'(t)$：流经电感的电流

因此，对$y(t)$求导数后，在 t_0 时有

$$\dot{y}(t)\Big|_{t=t_0} = \frac{d}{dt}\left(2e^{-t}x_1(t_0) - 2e^{-2t}x_2(t_0) + \int_{t_0}^{t} g(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)\Bigg|_{t=t_0}$$

$$= -2e^{-t}x_1(t_0) + 4e^{-2t}x_2(t_0)$$

$$+(g(0)u(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} g(t-\tau)u(\tau)d\tau)\Bigg|_{t=t_0}$$

由 $$g(t)=2e^{-t}-2e^{-2t}\Rightarrow g(0)=0$$

$$\dot{y}(t_0)=-2e^{-t_0}x_1(t_0)+4e^{-2t_0}x_2(t_0)$$

注意到

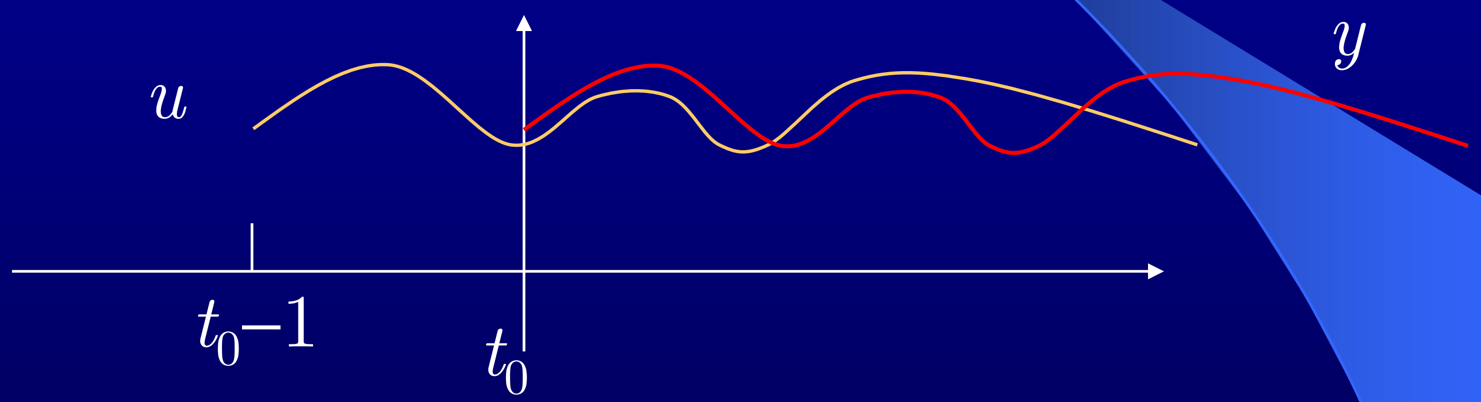
$$y(t_0)=2e^{-t_0}x_1(t_0)-2e^{-2t_0}x_2(t_0)$$

即

$$\begin{bmatrix} y(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2e^{-t_0} & -2e^{-2t_0} \\ -2e^{-t_0} & 4e^{-2t_0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix}$$

故我们也可以取 $y(t_0)$ 和 $\dot{y}(t_0)$ 为 t_0 时刻的状态。

例 1—5 单位时间延迟系统，$y(t)=u(t-1)$，为了唯一地由 $u_{[t_0,+\infty)}$ 确定 $y_{[t_0,+\infty)}$ 需要知道 $u_{[t_{0-1},t_0)}$ 的信息。



信息 $u_{[t_{0-1},t_0)}$ 就可以作为系统在 t_0 时刻的初始状态。这里 t_0 时的初始状态由无限个数所组成。

状态变量的几点特点：

第一，状态变量的**不唯一性**；一般取有物理意义的量。

第二，状态变量的数目等于且仅仅等于系统中包含**独立贮能元件的数目**；

第三，状态变量的数目的可以是**有限个**，也可以是**无限多个**；

第四，状态向量取值的实向量空间，称为**状态空间**。

二、动态方程

1. 线性动态

描述系统输入、输出和状态之间关系的方程组，称为**系统的动态方程**($Dynamical\ Equation$)。

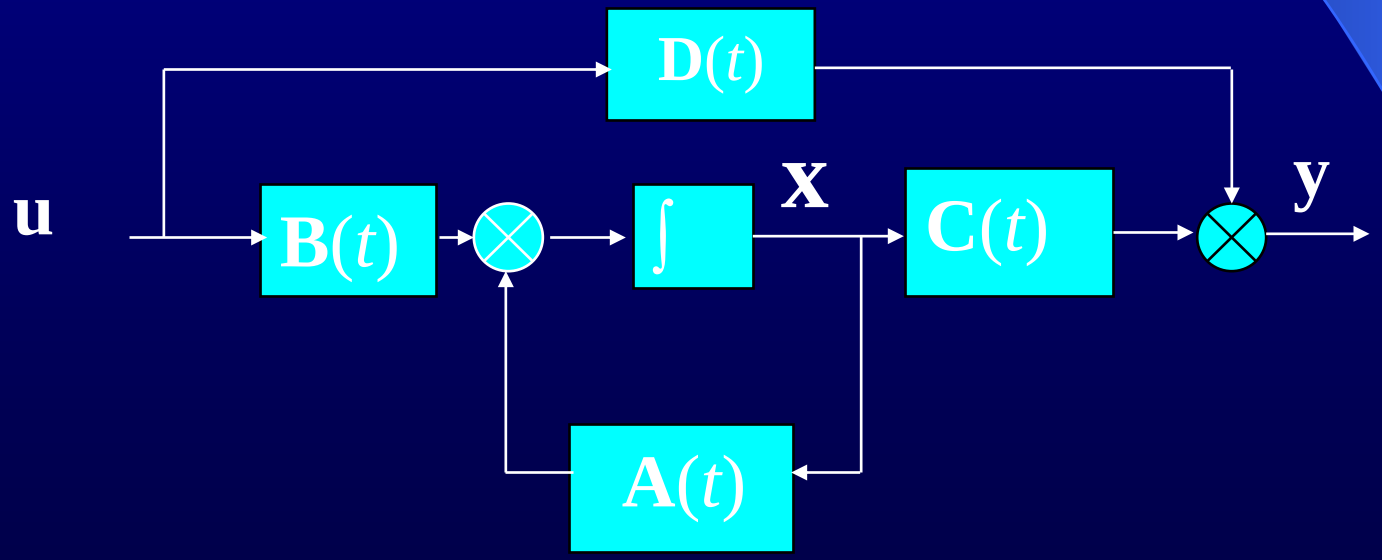
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \qquad (1-33a) \quad \text{状态方程}$$

$$\mathbf{y} = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \qquad (1-33b) \quad \text{输出方程}$$

若f、g是x和u的线性函数，则称(1—33)为线性动态方程，具体形式为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \quad \text{状态方程} \qquad (1-34a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \quad \text{输出方程} \qquad (1-34b)$$



例： 考虑系统：$y^{(3)}+\alpha_1 y''+\alpha_2 y'+\alpha_3 y=u$

令 $x_1=y, x_2=y', x_3=y''$ 则显然

$$\dot{x}_1=x_2, \dot{x}_2=x_3,$$

$$\dot{x}_3=-\alpha_3 x_1-\alpha_2 x_2-\alpha_1 x_3+u$$

写成一阶微分方程组的形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -\alpha_3 & -\alpha_2 & -\alpha_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}\mathbf{x} \Leftrightarrow y=\mathbf{c}\mathbf{x}$$

系统的动态方程是由状态方程和输出方程组成的。

注：在第一节中，线性是在松弛条件下定义的，即映射

$$\{u_{[t_0,+\infty)}\} \to \{y_{[t_0,+\infty)}\}$$

满足

$$\{\alpha_1 u^1_{[t_0,+\infty)} + \alpha_2 u^2_{[t_0,+\infty)}\} \to \{\alpha_1 y^1_{[t_0,+\infty)} + \alpha_2 y^2_{[t_0,+\infty)}\}$$

而在状态空间的情形，映射关系为

$$\{x(t_0), u_{[t_0,+\infty)}\} \to \{x_{[t_0,+\infty)}, y_{[t_0,+\infty)}\}$$

则线性定义为(参见C. T. Chen)：

$$\{\alpha_1 x^1(t_0) + \alpha_2 x^2(t_0), \alpha_1 u^1_{[t_0,+\infty)} + \alpha_2 u^2_{[t_0,+\infty)}\}$$

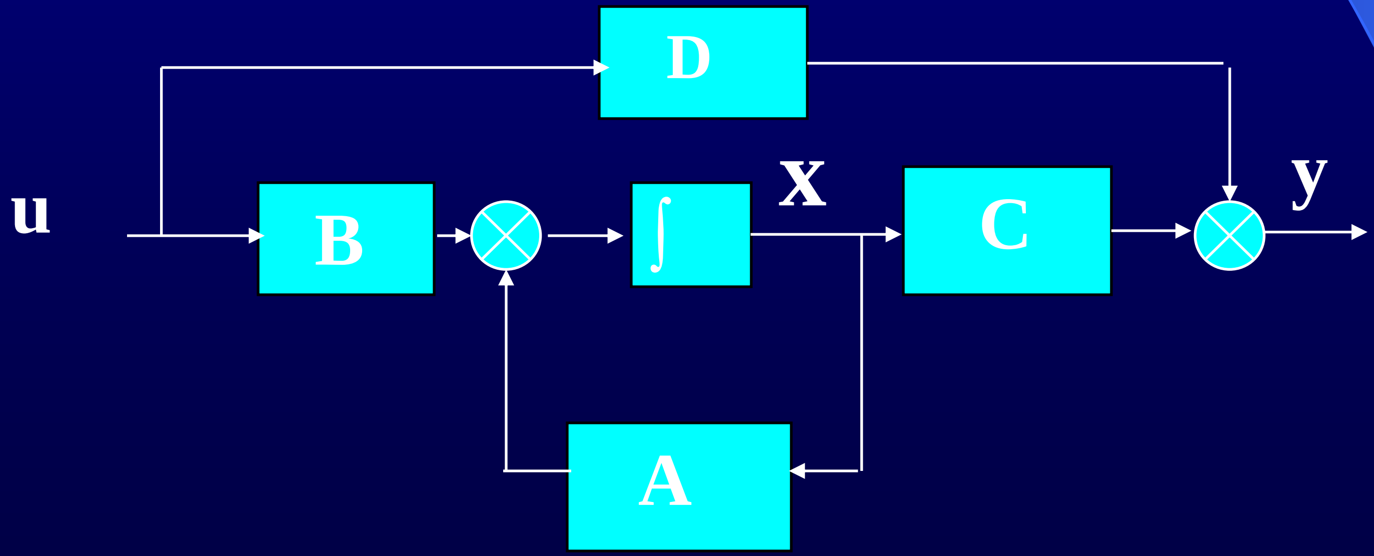
$$\to \{\alpha_1 x^1_{[t_0,+\infty)} + \alpha_2 x^2_{[t_0,+\infty)}, \alpha_1 y^1_{[t_0,+\infty)} + \alpha_2 y^2_{[t_0,+\infty)}\}$$

2. 线性时不变动态方程

n 维线性时不变动态方程的一般形式为

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{aligned} \qquad (1—35)$$

其框图为



3. 时不变系统的传递函数矩阵：

动态方程进行*Laplace* 变换可得

$$s\mathbf{x}(s)-\mathbf{x}_0=\mathbf{A}\mathbf{x}(s)+\mathbf{B}\mathbf{u}(s) \qquad (1\text{-}40a)$$

$$\mathbf{y}(s)=\mathbf{C}\mathbf{x}(s)+\mathbf{D}\mathbf{u}(s) \qquad (1\text{-}40b)$$

由上式可得

$$\mathbf{x}(s)=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0+(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}(s)$$

$$\mathbf{y}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{x}_0+[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{u}(s)$$

若$\mathbf{x}^0=0$，可得

$$\mathbf{y}(s)=[\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}]\mathbf{u}(s)=\mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s)$$

其中 $$\mathbf{G}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}$$

称为动态方程的**传递函数阵**。

4. 预解矩阵 $(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$

将$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$展成矩阵级数:

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{s}\mathbf{I}+\frac{1}{s^2}\mathbf{A}+\frac{1}{s^3}\mathbf{A}^2+\cdots$$

注意到 $\mathcal{L}\left(\dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right)=\dfrac{1}{s^k}$

$$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]=\mathbf{I}+\mathbf{A}t+\frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\mathbf{A}t)^k$$

$:=e^{\mathbf{A}t}$ ——**矩阵指数**

三、一些重要的关系式

1. 与预解矩阵有关的一些关系式

定理（*Cayley-Hamilton*）：令n阶矩阵$\mathbf{A}$的特征多项式为

$$\Delta(s)=\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=s^{n}+a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\cdots+a_n$$

则如下矩阵方程成立：

$$\mathbf{A}^{n}+a_1\mathbf{A}^{n-1}+\cdots+a_n\mathbf{I}=0$$

证明：对于任何一个$n\times n$的矩阵$\mathbf{A}$，其预解矩阵可以写成下列形式

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{\Delta(s)}\underbrace{(\mathbf{R}_0 s^{n-1}+\mathbf{R}_1 s^{n-2}+\cdots+\mathbf{R}_{n-2}s+\mathbf{R}_{n-1})}_{adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})} \quad (1-42)$$

其中

$$\Delta(s)=\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=s^n+a_1 s^{n-1}+a_2 s^{n-2}+\cdots+a_n$$

(1-42)两边左乘$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\Delta(s)$，可得

$$\Delta(s)\mathbf{I}=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})(\mathbf{R}_0 s^{n-1}+\mathbf{R}_1 s^{n-2}+\cdots+\mathbf{R}_{n-1})$$

比较上式两边s同次幂的系数(矩阵)有：

$$\begin{cases} \mathbf{R}_0 = \mathbf{I} & s^n \\ \mathbf{R}_1 = \mathbf{A}\mathbf{R}_0 + a_1\mathbf{I} = \mathbf{A} + a_1\mathbf{I} & s^{n-1} \\ \mathbf{R}_2 = \mathbf{A}\mathbf{R}_1 + a_2\mathbf{I} = \mathbf{A}^2 + a_1\mathbf{A} + a_2\mathbf{I} & s^{n-2} \\ \quad\vdots \\ \mathbf{R}_{n-1} = \mathbf{A}\mathbf{R}_{n-2} + a_{n-1}\mathbf{I} = \mathbf{A}^{n-1} + a_1\mathbf{A}^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\mathbf{I} & s^1 \end{cases} \qquad (1-44)$$

最后，比较零次幂系数有：

$$-\mathbf{A}\mathbf{R}_{n-1} = a_n\mathbf{I} \Rightarrow 0 = \mathbf{A}\mathbf{R}_{n-1} + a_n\mathbf{I} = \Delta(\mathbf{A}) = 0$$

将(1-44)的倒数第一式代入上式，有

$$\mathbf{A}^n + a_1\mathbf{A}^{n-1} + \cdots + a_n\mathbf{I} = 0$$

证完。

2. 利用（1-44）和（1-42）表达 $adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$ 和 $e^{\mathbf{A}t}$

(1) $adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$ 的表达式：

$$adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \Delta(s)(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(s)\mathbf{A}^k \qquad (1-45)$$

其中

$$\begin{bmatrix} p_0(s) \\ p_1(s) \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{n-1}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & a_1 \\ & 0 & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s^{n-1} \\ s^{n-2} \\ \vdots \\ \\ s^0 \end{bmatrix} \qquad (1-46)$$

(2) $e^{\mathbf{A}t}$ 的表达式：

由（1−45）可得

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_k(s)}{\Delta(s)}\mathbf{A}^k \qquad (1-47)$$

若对（1−47）进行拉氏反变换，且令

$$p_k(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{p_k(s)}{\Delta(s)}\right]$$

则可以得到矩阵指数$e^{\mathbf{A}t}$的一种表达式

$$e^{\mathbf{A}t}=\sum_{k=0}^{n-1}p_k(t)\mathbf{A}^k \qquad (1-48)$$

3. 矩阵指数函数的算法：

1) 根据定义：$e^{\mathbf{A}t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k$，难以得到解析表达式；

2）预解矩阵方法：$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]$：

a) 求$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$

b) 求$\mathcal{L}^{-1}[(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}]$（对低阶矩阵比较有效）

3) 化为若当阵的算法：

$$e^{\mathbf{A}t} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{P}\mathbf{J}^k\mathbf{P}^{-1} t^k = \mathbf{P}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{J}^k t^k\right)\mathbf{P}^{-1}$$

$$= \mathbf{P}\, e^{\mathbf{J}t}\mathbf{P}^{-1}$$

这里，$\mathbf{J}$ 为若当阵：

$$\mathbf{A} \sim \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & & \\ & \mathbf{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{J}_s \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & \\ & \lambda_i & 1 \\ & & \vdots \end{bmatrix}_{n_i \times n_i}$$

$$e^{\mathbf{J}t} = \begin{bmatrix} e^{\mathbf{J}_1 t} & & & \\ & e^{\mathbf{J}_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\mathbf{J}_s t} \end{bmatrix}$$

$$e^{\mathbf{J}_i t}=\begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & te^{\lambda_i t} & \cdots & \dfrac{t^{n_i-1}}{(n_i-1)!}e^{\lambda_i t} \\ & e^{\lambda_i t} & & \vdots \\ & & \ddots & \\ & & & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}_{n_i\times n_i}$$

为了得到以上结果，注意到

$$\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \vdots & \\ & & & \lambda_i \end{bmatrix}=\lambda_i\mathbf{I}+\mathbf{H}_i$$

而$\mathbf{H}_i$是一个幂零矩阵, 故在 $e^{J_i t}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(\lambda_i\mathbf{I}+\mathbf{H}_i)^k t^k$

利用二项式展开并注意到$\lambda_i\mathbf{I}$与$\mathbf{H}_i$相乘可换即可得到结果。

4. 矩阵指数函数的主要性质：

1) $\lim_{t\to 0} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}$

2) $$e^{\mathbf{A}t}e^{\mathbf{A}\tau} = \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\mathbf{A}^k \tau^k\right) = \sum_{j=0}^{\infty}\mathbf{A}^j\frac{(t+\tau)^j}{j!}$$
$$= e^{\mathbf{A}(t+\tau)}$$

3) $(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}$

4) $$\frac{d}{dt}e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t} = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{A};$$
$$\frac{d}{dt}e^{-\mathbf{A}t} = -e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{A} = -\mathbf{A}e^{-\mathbf{A}t}$$