第三讲

线性动态方程与等价动态方程

一、齐次方程解的性质

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} \qquad (1\text{-}50)$$

考虑一般的线性微分方程：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n \qquad (\mathrm{A1})$$

的解的性质。

解的存在和唯一性

称 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 是微分方程(1-50)的一个解，系指：

$$\dot{\boldsymbol{\Psi}}(t) = \mathbf{A}(t)\boldsymbol{\Psi}(t)$$

推论： 若 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 是微分方程 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ 的一个解，且对某个t_0，有 $\boldsymbol{\Psi}(t_0)=0$ ，则 $\boldsymbol{\Psi}(t)\equiv 0, \forall t$

定理1—2 方程$d\mathbf{x}/dt=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ 的所有解的集合，组成了实数域上的n 维向量空间。

证明：

a) **方程所有解构成线性空间：** 任取$d\mathbf{x}/dt=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$的两个解$\boldsymbol{\Psi}_1$、 $\boldsymbol{\Psi}_2$，则对任意的实数α_1和α_2，有

$$\frac{d}{dt}(\alpha_1\boldsymbol{\Psi}_1+\alpha_2\boldsymbol{\Psi}_2)=\alpha_1\dot{\boldsymbol{\Psi}}_1+\alpha_2\dot{\boldsymbol{\Psi}}_2=\alpha_1\mathbf{A}(t)\boldsymbol{\Psi}_1+\alpha_2\mathbf{A}(t)\boldsymbol{\Psi}_2$$

$$=\mathbf{A}(t)(\alpha_1\boldsymbol{\Psi}_1+\alpha_2\boldsymbol{\Psi}_2)$$

b)证明解空间的维数是n:

1) 设 $\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2,\cdots,\mathbf{e}^n$ 是个n个线性无关的向量，$\mathbf{\Psi}^i(t)$是在初始条件 $\mathbf{\Psi}^i(t_0)=\mathbf{e}^i$ （i=1，2，…，n）

时方程 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ 的解。要证明，$\mathbf{\Psi}^1(t),\mathbf{\Psi}^2(t),\cdots,$ $\mathbf{\Psi}^n(t)$ 是 $(-\infty,+\infty)$上的线性无关的 n个解。

反证法。若不然，存在$t'\in(-\infty,+\infty)$，使得

$$\mathbf{\Psi}^1(t'),\mathbf{\Psi}^2(t'),\cdots,\mathbf{\Psi}^n(t')$$

线性相关⇔必存在一个非零实向量$\boldsymbol{\alpha}$ 使得

$$[\boldsymbol{\Psi}^1(t') \quad \boldsymbol{\Psi}^2(t') \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Psi}^n(t')]\boldsymbol{\alpha} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha_1\boldsymbol{\Psi}^1(t') + \alpha_2\boldsymbol{\Psi}^2(t') + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{\Psi}^n(t') = 0$$

注意到$\boldsymbol{\Psi}(t) \equiv 0$ 是齐次方程的一个解；而

$$X(t) = \alpha_1\boldsymbol{\Psi}^1(t) + \alpha_2\boldsymbol{\Psi}^2(t) + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{\Psi}^n(t)$$

也是齐次微分方程 满足初值 $X(t') = 0$ 的一个解

且由唯一性定理有

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = X(t) = \alpha_1\boldsymbol{\Psi}^1(t) + \alpha_2\boldsymbol{\Psi}^2(t) + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{\Psi}^n(t) \equiv 0 \ \forall t$$

特别地，当$t=t_0$时有

$$[\boldsymbol{\Psi}^1(t_0) \quad \boldsymbol{\Psi}^2(t_0) \quad \cdots \quad \boldsymbol{\Psi}^n(t_0)]\alpha$$
$$=[\mathbf{e}^1 \quad \mathbf{e}^2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}^n]\alpha=0$$

这意味着向量组 $\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2,\cdots,\mathbf{e}^n$ 线性相关，矛盾！

$$\boldsymbol{\Psi}^1(t), \quad \boldsymbol{\Psi}^2(t), \quad \cdots \quad ,\boldsymbol{\Psi}^n(t)$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关。

2) 证明$d\mathbf{x}/dt=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$的任一解均可表成它们的线性组合，即解的集合组成了$n$维线性空间。

令 $\mathbf{\Psi}$ 是方程$d\mathbf{x}/dt=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$满足初始条件

$$\mathbf{\Psi}(t_0)=\mathbf{e}$$

的任一解。$\mathbf{e}$ 显然可唯一地被 $\mathbf{e}^1,\mathbf{e}^2,\cdots,\mathbf{e}^n$ 线性表出：

$$\mathbf{e}=a_1\mathbf{e}^1+a_2\mathbf{e}^2+\cdots+a_n\mathbf{e}^n=\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbf{e}^i$$

容易验证，$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{\Psi}^i(t)$ 是方程 $d\mathbf{x}/dt=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ 满足初值条件

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{\Psi}^i(t_0) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}^i = \mathbf{e}$$

的解。根据唯一性定理，满足初值条件的解只有一个，故必有

$$\mathbf{\Psi}(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{\Psi}^i(t)$$

证完。

二、基解矩阵与状态转移矩阵

1. 基解矩阵

定义1—8：方程 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ 的任意 n 个线性无关解构成的矩阵

$$[\mathbf{\Psi}^1(t) \quad \mathbf{\Psi}^2(t) \quad \cdots \quad \mathbf{\Psi}^n(t)] := \mathbf{\Psi}(t)$$

称为方程 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ 的基本解矩阵或基解矩阵。

基解矩阵具有如下性质：

$$\dot{\mathbf{\Psi}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}$$

$$\mathbf{\Psi}(t_0)=\mathbf{E} \qquad (1\text{-}51)$$

其中$\mathbf{E}$为非奇异矩阵。

定理1—3 方程 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ 的基解矩阵对于任意的t均为非奇异矩阵。

定理1—4 若 $\mathbf{\Psi}_1$、 $\mathbf{\Psi}_2$均为$d\mathbf{x}/dt$=$\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$的基解矩阵，则存在$n\times n$非奇异实常量矩阵$\mathbf{C}$，使得

$$\mathbf{\Psi}_1(t) = \mathbf{\Psi}_2(t)\cdot\mathbf{C}$$

令 $\boldsymbol{\Psi}(t)$ 是的任一基解矩阵，则任意解

$\mathbf{x}(t)$总可以表示为：

$$\mathbf{x}(t)=\boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\alpha},\quad \boldsymbol{\alpha}\neq 0$$

特别，

$$\mathbf{x}(t_0)=\boldsymbol{\Psi}(t_0)\boldsymbol{\alpha}\Rightarrow\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0)$$

将其代入上式，得到

$$\mathbf{x}(t)=\boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}(t_0)$$

这正描述了从时间t_0到时间t的状态转移。

2. 状态转移矩阵

定义1—9 令 $\Psi(t)$ 是的任一基解矩阵，则

$$\mathbf{\Phi}\left(t,t_0\right)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)$$

称为(1—50)的状态转移矩阵，这里 $t,t_0\in(-\infty,+\infty)$

3. 状态转移矩阵具有下列重要性质：

1). $\mathbf{\Phi}\left(t,t\right)=\mathbf{I}$

2). $\mathbf{\Phi}^{-1}\left(t,t_0\right)=\mathbf{\Psi}(t_0)\mathbf{\Psi}^{-1}(t)=\mathbf{\Phi}\left(t_0,t\right)$

3). $\mathbf{\Phi}\left(t_2,t_0\right)=\mathbf{\Phi}\left(t_2,t_1\right)\mathbf{\Phi}\left(t_1,t_0\right)$

4). 由基解矩阵的性质

$$\dot{\mathbf{\Psi}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{\Psi}$$

$$\mathbf{\Psi}(t_0)=\mathbf{E}$$

可证明 $\mathbf{\Phi}(t,t_0)$ 是下列矩阵微分方程的唯一解：

$$\frac{d\mathbf{\Phi}(t,t_0)}{dt}=\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)$$

$$\mathbf{\Phi}(t_0,t_0)=\mathbf{I} \qquad (1-52)$$

5).齐次方程 $d\mathbf{x}/dt=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ 在初始条件 $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0$ 下的解为

$$\mathbf{x}(t)=\mathbf{\Phi}\left(t,t_0\right)\mathbf{x}^0 \qquad （1—53）$$

故 $\mathbf{\Phi}(t,t_0)$ 可看作一个线性变换，它将 t_0 时的状态 $\mathbf{x}^0$ 映射到时刻 t 的状态 $\mathbf{x}(t)$。

例：试证明如下命题：状态转移矩阵是唯一的，

三、非齐次方程的解

1. 时变线性系统的解

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \qquad (1-49)$$

令 $$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}\left(t, t_0\right)\boldsymbol{\xi}(t) \qquad (s-1)$$

则容易得到：

$$\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}\left(t, t_0\right)\boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{\Phi}\left(t, t_0\right)\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}\left(t, t_0\right)\boldsymbol{\xi}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$

从而 $$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \mathbf{\Phi}^{-1}\left(t, t_0\right)\mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$

这样容易得到如下结论：

定理1—5 状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

的解由下式给出：

$$\mathbf{x}(t) = \Phi\left(t, t_0\right)\mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (1-54)$$

其中 $\Phi\left(t, t_0\right)\mathbf{x}^0$ 是初值$\mathbf{x}^0$的线性函数，称为**零输入响应**

$\int_{t_0}^{t} \mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$ 是外作用$\mathbf{u}$的线性函数，称为**零状态响应**

2. 输入输出关系

推论1—5 动态方程（1—34）的输出为

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}(t)\Phi\left(t,t_0\right)\mathbf{x}^0$$

$$+\int_{t_0}^{t}\mathbf{C}(t)\Phi(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \qquad (1-57)$$

特别，若 $\mathbf{x}(t_0)=0$，可得到脉冲响应矩阵：

$$t\geq\tau: \quad \mathbf{G}(t,\tau)=\mathbf{C}(t)\Phi(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)+\mathbf{D}(t)\delta(t-\tau)$$

$$t<\tau: \quad \mathbf{G}(t,\tau)=0$$

这里利用了脉冲函数的采样特性。

3. 线性时不变动态方程的解

线性时不变动态方程：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \qquad (1-60)$$

基解矩阵为： $e^{\mathbf{A}t}$

状态转移矩阵：

$$\mathbf{\Phi}(t,t_0) = e^{\mathbf{A}t}(e^{\mathbf{A}t_0})^{-1} = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} = \mathbf{\Phi}(t-t_0)$$

其解为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}^0 + \int_{t_0}^{t} \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

通常假定t_0=0，这时则有

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_{0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (1-63)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_{0}^{t} \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \qquad (1-64)$$

式对应的脉冲响应矩阵

$$t \geq \tau \quad \mathbf{G}(t-\tau) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t-\tau)$$

$$t < \tau \qquad \mathbf{G}(t,\tau) = 0$$

或更通常地写为

$$\mathbf{G}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t), t \geq 0 \qquad (1-65)$$

对应的传递函数阵

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \qquad (1-66)$$

这是一个有理函数矩阵。

四、等价变换，等价动态方程

1. 时不变系统的等价动态方程

定义1—10 线性时不变方程

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}\bar{x} + \bar{B}u \qquad \boxed{\bar{x} = Px}$$

$$y = \bar{C}\bar{x} + \bar{D}u \qquad (1-67)$$

称为原系统(A, B, C, D) 的代数等价动态方程，当且仅当存在非奇异矩阵P，使得

$$\begin{aligned} \bar{A} &= PAP^{-1} \\ \bar{B} &= PB \\ \bar{C} &= CP^{-1} \\ \bar{D} &= D \end{aligned} \qquad （1—68）$$

动态方程是等价动态方程的必要条件是它们的维数相同和**脉冲响应矩阵/传递函数阵相同**。但反之未必成立。

定义（零状态等价）：两个时不变动态系统称为是零状态等价的，当且仅当它们具有相同的脉冲响应矩阵或相同的传递函数阵。

据此，两个等价的动态方程显然是零状态等价的，但反之不然。

例：考虑如下两个系统：

$$\dot{x} = 3x + 2u$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} x$$

显然，这两个系统不是代数等价系统，但容易验证，它们是零状态等价的。

2. 时变系统的等价动态方程

设线性时变动方程为

$$
\begin{aligned}
\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\
\mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \qquad (1-69) \\
\overline{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)
\end{aligned}
$$

其中$\mathbf{P}(t)$为定义在$(-\infty, +\infty)$上的复数矩阵，对所有t，$\mathbf{P}(t)$ 非奇异且关于t是连续可微的。

定义1—10′ 动态方程

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}(t)\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}(t)\mathbf{u} \qquad \boxed{\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t)}$$

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}(t)\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{D}}(t)\mathbf{u} \qquad (1-70)$$

称为$(\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t))$ 的代数等价动态方程，当且仅当存在$\mathbf{P}(t)$，使得

$$\bar{\mathbf{A}}(t) = \left[\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \dot{\mathbf{P}}(t)\right]\mathbf{P}^{-1}(t)$$

$$\bar{\mathbf{B}}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)$$

$$\bar{\mathbf{C}}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{P}^{-1}(t) \qquad （1—71）$$

$$\bar{\mathbf{D}}(t) = \mathbf{D}(t)$$

3. 基解矩阵和状态转移矩阵代数等价下的关系

- 若$\boldsymbol{\Psi}(t)$ 是$(\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t))$的一个基本矩阵，则

$$\mathbf{P}(t)\Psi(t)$$

是$(\bar{\mathbf{A}}(t), \bar{\mathbf{B}}(t), \bar{\mathbf{C}}(t), \bar{\mathbf{D}}(t))$的一个基本矩阵。

- 若$\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$是$(\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t))$的状态转移矩阵，则

$$\mathbf{P}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)\mathbf{P}^{-1}(t_0)$$

是$(\bar{\mathbf{A}}(t), \bar{\mathbf{B}}(t), \bar{\mathbf{C}}(t), \bar{\mathbf{D}}(t))$ 的转移矩阵。

系统两种数学描述之间的关系

一、两种描述方法的比较

1. 输入—输出**不能揭示系统内部的行为**。

例： 考虑系统：$\ddot{y}+\alpha_1\dot{y}+\alpha_2 y=u(t),\ t\geq t_0=0$

若$y(0)=y'(0)=0$，可用传递函数描述系统

$$y(s)=\frac{1}{s^2+\alpha_1 s+\alpha_2}u(s)$$

采用状态空间描述：

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\begin{bmatrix}\dot{y}(t)\\ \ddot{y}(t)\end{bmatrix}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b}u,\ t\geq t_0$$

系统的内部和外部状态均能得到揭示。

2. 对于比较复杂的系统，求其**动态方程是一件困难的工作**。在这种情况下，输入—输出描述有时更为有效。

3. 在经典控制理论中，分析和综合都是在传递函数基础上实现的。例如容易用根轨迹方法或Bode图完成反馈系统的设计，这种设计由于**解的不唯一性**，在设计法上含有较多的试凑的成份，故设计者的经验起着很重要的作用。

4. 现代控制理论中系统设计是用动态方程完成的，有些问题是经典理论不能解决的，如最优控制问题、极点配置问题等。

5. 有限维状态方程描述仅适用于集中参数系统，输入输出系统也可以描述分布参数系统。

二、脉冲响应矩阵与动态方程

1. 由动态方程到输入/输出描述

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \qquad (1-75)$$

在$\mathbf{x}(t_0)=0$时，动态方程的解为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\int_{t_0}^{t} \Phi(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left[\mathbf{C}(t)\Phi(t,\tau)\mathbf{B}(\tau) + \mathbf{D}(t)\delta(t-\tau)\right]\mathbf{u}(\tau)d\tau \qquad (1-76)$$

令 $$\mathbf{G}(t,\tau) = \begin{cases} \mathbf{C}(t)\Phi(t,\tau)\mathbf{B}(\tau) + \mathbf{D}(t)\delta(t-\tau) & t \geq \tau \\ 0 & t < \tau \end{cases} \qquad (1-77)$$

（1—76）式可写成

$$\mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{G}(t,\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

若一个系统可以用状态变量描述，容易得到其输入——输出描述。相反的问题，即从系统的输入—输出描述求取状态变量描述则要复杂得多。

2. 由输入/输出描述到动态方程

这里实际上包含有两个问题：

1). **（存在问题）**是否可能从系统的脉冲响应阵获得状态变量描述？

2). **（实现问题）**如果能，怎样由脉冲响应阵求出状态变量描述？（将在第三章中详细讨论）

定义1—11 一个具有脉冲响应矩阵 $\mathbf{G}(t,\tau)$ 的系统，若存在一个线性有限维的动态方程，

$$\mathbf{E}:(\mathbf{A}(t),\mathbf{B}(t),\mathbf{C}(t),\mathbf{D}(t)) \qquad (1-75)$$

与其具有相同的脉冲响应阵，则称 $\mathbf{G}(t,\tau)$ 是可实现的，并称 $(\mathbf{A}(t),\mathbf{B}(t),\mathbf{C}(t),\mathbf{D}(t))$ 是 $\mathbf{G}(t,\tau)$ 的一个动态方程实现。

定理1—8 $q\times p$脉冲响应矩阵 $\mathbf{G}(t,\tau)$ 是能用$(\mathbf{A}(t),\mathbf{B}(t),\mathbf{C}(t),\mathbf{D}(t))$形式有限维动态方程实现的，当且仅当$\mathbf{G}(t,\tau)$ 可分解为

$$\mathbf{G}(t,\tau)=\mathbf{M}(t)\mathbf{N}(\tau)+\mathbf{D}(t)\delta(t-\tau) \quad \forall t\geq\tau \qquad (1-78)$$

其中$\mathbf{D}(t)$是$q\times p$矩阵，$\mathbf{M}(t)$和$\mathbf{N}(t)$的分别是t的$q\times n$和$n\times p$连续矩阵。

证明 必要性：设动态方程

$$\mathbf{E}:(\mathbf{A}(t),\mathbf{B}(t),\mathbf{C}(t),\mathbf{D}(t)) \qquad (1-75)$$

是 $\mathbf{G}(t,\tau)$ 的一个实现，则有

$$\mathbf{G}(t,\tau)=\mathbf{D}(t)\delta(t-\tau)+\mathbf{C}(t)\Phi(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)$$
$$=\mathbf{D}(t)\delta(t-\tau)+\mathbf{C}(t)\Psi(t)\Psi^{-1}(\tau)\mathbf{B}(\tau)$$

其中 $\Psi(t)$ 是 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ 的基本矩阵。只要令

$$\mathbf{M}(t)=\mathbf{C}(t)\boldsymbol{\Psi}(t),\quad \mathbf{N}(\tau)=\boldsymbol{\Psi}^{-1}(\tau)\mathbf{B}(\tau)$$

就可以了。

充分性： 若$\mathbf{G}(t,\tau)$有

$$\mathbf{G}(t,\tau)=\mathbf{D}(t)\delta(t-\tau)+\mathbf{M}(t)\mathbf{N}(\tau) \quad \forall t \geq \tau \quad (1-78)$$

的形式，构造下列维动态方程

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{N}(t)\mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{M}(t)\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \end{aligned} \qquad (1-79)$$

容易验证上式所确定的

$$(\mathbf{A}(t),\ \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)) = (\mathbf{0},\ \mathbf{N}(t), \mathbf{M}(t), \mathbf{D}(t))$$

是$\mathbf{G}(t,\tau)$的一个实现。事实上，

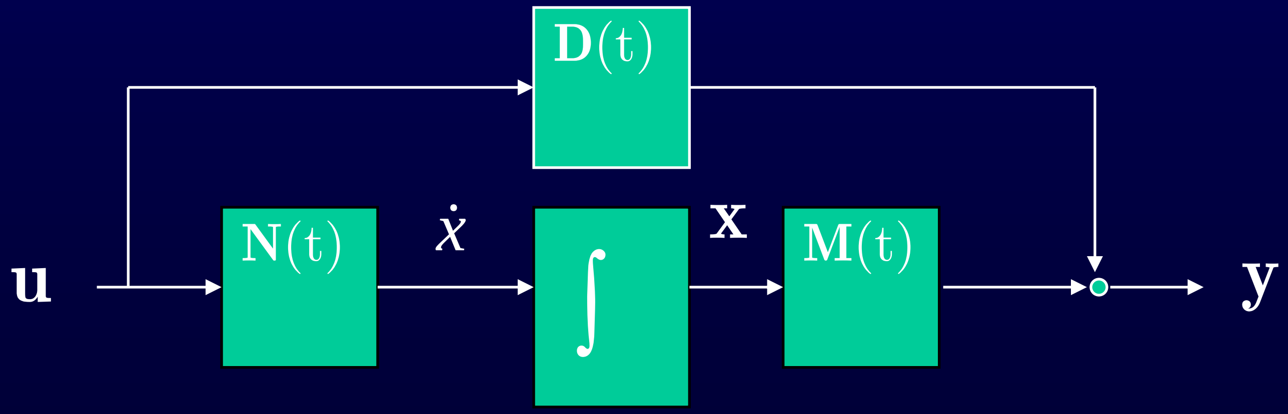
$$\mathbf{x}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathbf{N}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

代入$\mathbf{y}(t) = \mathbf{M}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$，有

$$\mathbf{y}(t) = \int_{t_0}^{t} \underbrace{\{\mathbf{M}(t)\mathbf{N}(\tau) + \mathbf{D}(t)\delta(t-\tau)\}}_{\mathbf{G}(t,\tau)}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

证完。

（1—79）可用下图所示的没有反馈的结构来模拟：



例： 设 $g(t,\tau)=g(t-\tau)=(t-\tau)e^{\lambda(t-\tau)}$

易于得到

$$g(t-\tau)=(t-\tau)e^{\lambda(t-\tau)}=\underbrace{\begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t}\end{bmatrix}}_{\mathbf{M}(t)}\underbrace{\begin{bmatrix} -\tau e^{-\lambda\tau} \\ e^{-\lambda\tau}\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}(\tau)}$$

是 $g(t,\tau)$ 的一个实现。当然，可能的实现不止一个。

3. 有理传递函数矩阵可实现的条件

时不变系统的输入/输出描述为：

$$\mathbf{y}(t)=\int_0^t \mathbf{G}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{y}(s)=\mathbf{G}(s)\mathbf{u}(s) \qquad (1-80)$$

现假定已找到该系统的一个动态方程描述为

$$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y}=\mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{D}\mathbf{u} \qquad (1-81)$$

由（1—81）可求出其传递矩阵为

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}=\frac{\mathbf{C}\,adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}+\mathbf{D} \qquad (1-83)$$

因为(1-80)、（1-81）表示的是同一个系统，故：

$$\mathbf{G}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}+\mathbf{D}=\frac{\mathbf{C}\,adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}+\mathbf{D} \qquad (1-83)$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_k(s)}{\Delta(s)}\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B}+\mathbf{D}$$

结论：(1-83）左边=右边表明，$\mathbf{G}(s)$可用（$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$,$\mathbf{C}$,$\mathbf{D}$）的动态方程实现的条件是$\mathbf{G}(s)$的每一个元都是 s 的有理函数，而且系统是正则或严格正则的。

定理1—9 $\mathbf{G}(s)$可由有限维线性动态方程$(\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C},\ \mathbf{D})$实现的充分必要条件是，传递函数矩阵$\mathbf{G}(s)$是正则有理函数矩阵。

证明： **必要性：**前面已经证明。

充分性：因为$\mathbf{G}(s)$是$q\times p$正则有理函数矩阵，$\mathbf{G}(\infty)$显然是一常量矩阵，记$\mathbf{G}(\infty)$为$\mathbf{D}$，因而$\mathbf{G}(s)$可分解如下：

$$\mathbf{G}(s)=\tilde{\mathbf{G}}_0(s)+\mathbf{D}$$

其中$\tilde{\mathbf{G}}_0(s)$是严格正则的有理函数矩阵。现在证明存在A、B、C阵，使得

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\tilde{\mathbf{G}}_0(s)$$

证明是构造性的。设 $\tilde{\mathbf{G}}_0(s)$ 各元素的分母的首一最小公倍式为

$$g(s)=s^r+g_{r-1}s^{r-1}+\cdots+g_1s+g_0$$

则 $\tilde{\mathbf{G}}_0(s)$ 可表示如下：

$$\tilde{\mathbf{G}}_0(s)=\frac{1}{g(s)}[\mathbf{G}_0+\mathbf{G}_1s+\cdots+\mathbf{G}_{r-1}s^{r-1}]$$

其中，$\mathbf{G}_i(s)$均为$q\times p$的常量矩阵。

按下列方式构造A、B、C阵：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0_p & \mathbf{I}_p & & & \\ & 0_p & \mathbf{I}_p & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0_p & \mathbf{I}_p \\ -g_0\mathbf{I}_p & -g_1\mathbf{I}_p & \cdots & & -g_{r-1}\mathbf{I}_p \end{bmatrix}_{rp\times rp} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0_p \\ 0_p \\ \vdots \\ \\ \mathbf{I}_p \end{bmatrix}_{rp\times p}$$

$$\mathbf{C}=[\mathbf{G}_0 \quad \mathbf{G}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{G}_{r-1}]_{q\times rp}$$

因此，只要验证A、B、C给出了$\mathbf{G}_0(s)$的一个实现，即：

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\tilde{\mathbf{G}}_0(s)$$ 就可以了。

令

$$X(s) =: (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ \vdots \\ X_r(s) \end{pmatrix}$$

则 $(s\mathbf{I} - \mathbf{A})X(s) = \mathbf{B}$, 或 $sX(s) = \mathbf{A}X(s) + \mathbf{B}$

考虑到矩阵**A**和**B**的形式，进而可以得到

$$X_2(s) = sX_1(s),\quad \mathrm{X}_3(s) = sX_2(s) = s^2X_1(s)$$

$$\vdots$$

$$X_r(s) = sX_{r-1}(s) = s^{r-1}X_1(s)$$

$$sX_r(s) = -g_0X_1(s) - g_1X_2(s) - \cdots - g_{r-1}X_r(s) + I_p$$

将前面各式带入最后一个式子得到

$$X_1(s) = \frac{1}{g(s)}I_p \qquad \cdots \qquad X_i(s) = \frac{1}{g(s)}s^{i-1}I_p, i = 1, 2\cdots, r$$

这样，即可得到

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\frac{1}{g(s)}\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p\\ s\mathbf{I}_p\\ \vdots\\ s^{r-1}\mathbf{I}_p\end{pmatrix}$$

则

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\frac{1}{g(s)}[\mathbf{G}_0\quad \mathbf{G}_1\quad \cdots\quad \mathbf{G}_{r-1}]\begin{pmatrix}\mathbf{I}_p\\ s\mathbf{I}_p\\ \vdots\\ s^{r-1}\mathbf{I}_p\end{pmatrix}=\tilde{\mathbf{G}}_0(s)$$

证完。

例: 若有理函数矩阵为

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+3)(s+1)}+5 \\ \dfrac{1}{(s+4)(s+3)} & \dfrac{1}{(s+4)(s+5)} \end{bmatrix}$$

试求它的一个实现。

$$\mathbf{G}(s)=\tilde{\mathbf{G}}_0(s)+\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g(s)=(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)$$
$$=s^5+15s^4+85s^3+225s^2+274s+120$$

$$g(s)\tilde{\mathbf{G}}_0(s)=\begin{bmatrix} 2s^3+24s^2+94s+120 & s^3+11s^2+38s+40 \\ s^3+8s^2+17s+10 & s^3+6s^2+11s+3 \end{bmatrix}$$

$$g(s)\tilde{\mathbf{G}}_0(s)=\begin{bmatrix} 2s^3+24s^2+94s+120 & s^3+11s^2+38s+40 \\ s^3+8s^2+17s+10 & s^3+6s^2+11s+6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_0=\begin{bmatrix}120 & 40\\ 10 & 6\end{bmatrix},\ \mathbf{G}_1=\begin{bmatrix}94 & 38\\ 17 & 11\end{bmatrix},\ \mathbf{G}_2=\begin{bmatrix}24 & 11\\ 8 & 6\end{bmatrix},\ \mathbf{G}_3=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{G}_4=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

具体实现形式见教材。

第一章　作业

P. 28-30

1, 6, 8, 15b, 17, 19, 25, 29

第二章

线性系统的可控性及其判别

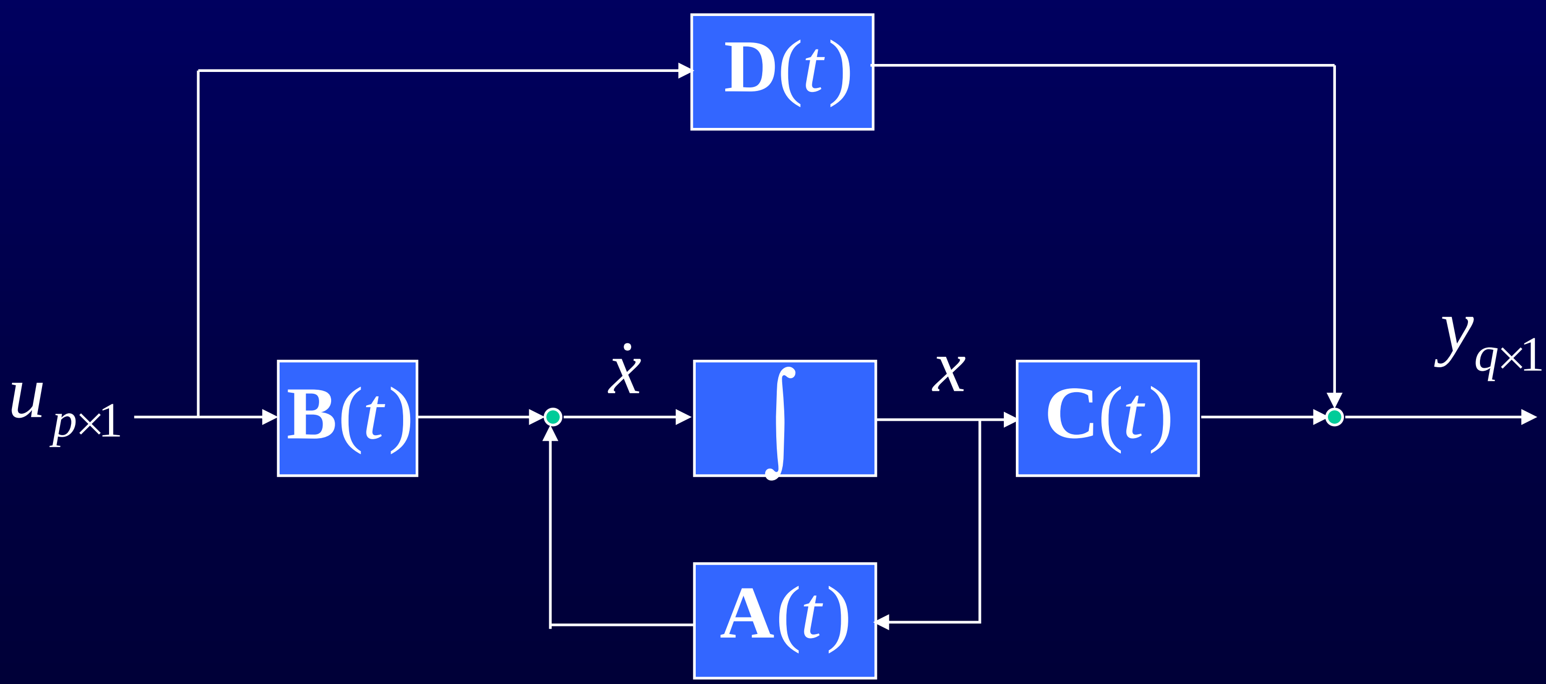
可控性和可观测性问题的提出

1. 基本假设和容许控制

给定线性系统：

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}, \quad t \in [t_0, +\infty) \quad (2-1)$$



注：一个函数 f 称为在 $[t_0,+\infty)$ 上分段连续，系指对任意给定的闭区间 $[t_1,t_2]\subset[t_0,+\infty)$ ，其不连续点的个数有限。

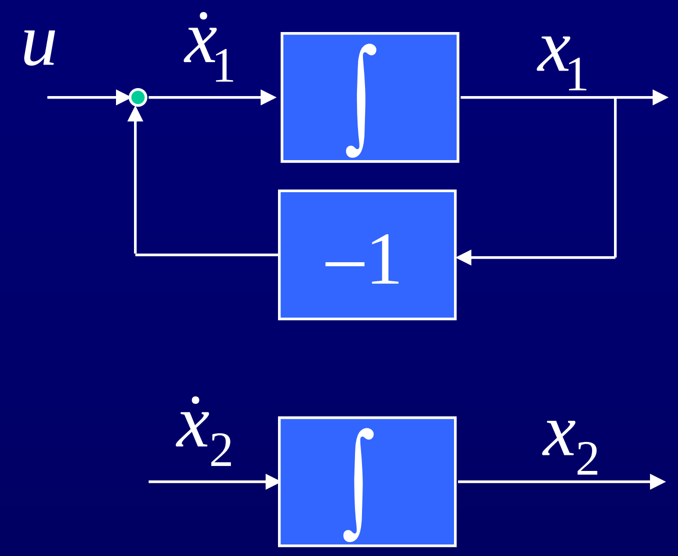
2. 可控性和可观测性的概念

在系统分析和设计中两个关键问题是：

1). 系统的状态能否由输入来控制?

2).系统的状态能否由输出来反映?

2. 可控性和可观测性的概念



1). 系统的状态能否由输入来控制?

例： 考虑如下二阶系统：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

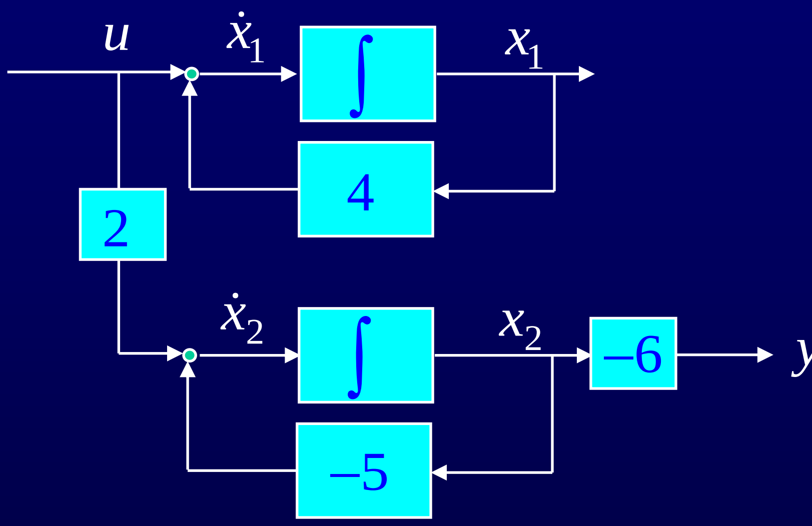
状态 x_2 显然不能通过输入 u来改变其运动轨迹。事实上，若$x_2(t_0)$非零，x_2 将发散到无穷。

2).系统的的状态能否由输出来反映?

例： 考虑如下系统，其中仅输入和输出可测量：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 4x_1 + u \\ \dot{x}_2 = -5x_2 + 2u \end{cases}$$

$$y = -6x_2$$



显然，系统的状态不能由输出完全观测到。事实上，x_1和输出y没有直接和间接的联系。

1) **.**系统的状态 x 能否由输入来控制？——**可控性概念；**

2) **.**系统的状态 x 能否由输出来反映？——**可观测性概念。**

动态方程

$$\dot{x} = \mathbf{A}(t)x + \mathbf{B}(t)u$$
$$y = \mathbf{C}(t)x + \mathbf{D}(t)u$$

可控性研究的是矩阵对 $(\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t))$的关系；

可观测性研究的是矩阵对$(\mathbf{A}(t), \mathbf{C}(t))$ 之间的关系。

时间函数的线性无关性

一、一组给定函数在某个区间上的线性相关性

1.标量情形：

考虑一组定义在区间 $[t_1, t_2]$ 上的复值**连续函数** $f_1, f_2, \cdots, f_n$，有：

定义2-1 若存在不全为零的复数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$,使得

$$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \cdots + \alpha_n f_n(t) = 0 \quad \forall t \in [t_1, t_2]$$

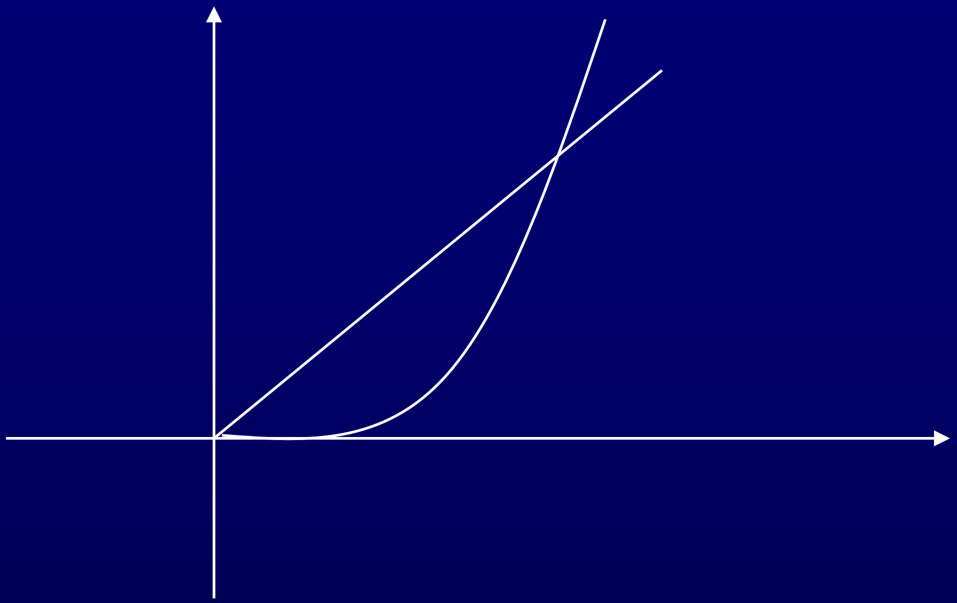
成立，则称在复数域上，实变量复值函数 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 在区间 $[t_1, t_2]$ 上**线性相关**。否则，称其为在 $[t_1, t_2]$ 上**线性无关**。

注意：

1）与常值向量的线性相关性或无关性不同，一组变量的线性相关性或无关性，**变量所定义的区间**至关重要。

2）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 为复常数。数域不同可能导致不同结果。

例1： 令$f_1(t)=t,\ f_2(t)=t^2$，讨论它们在$[0,\ 1]$上的线性相关性。

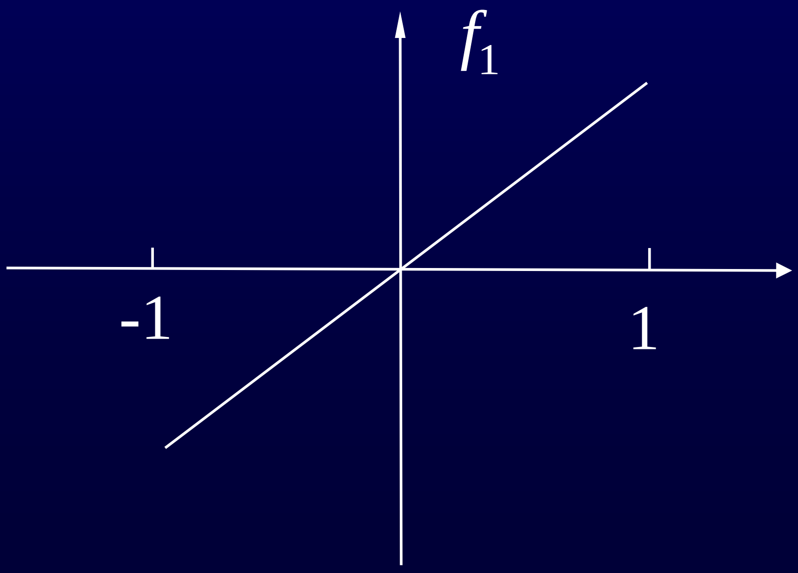


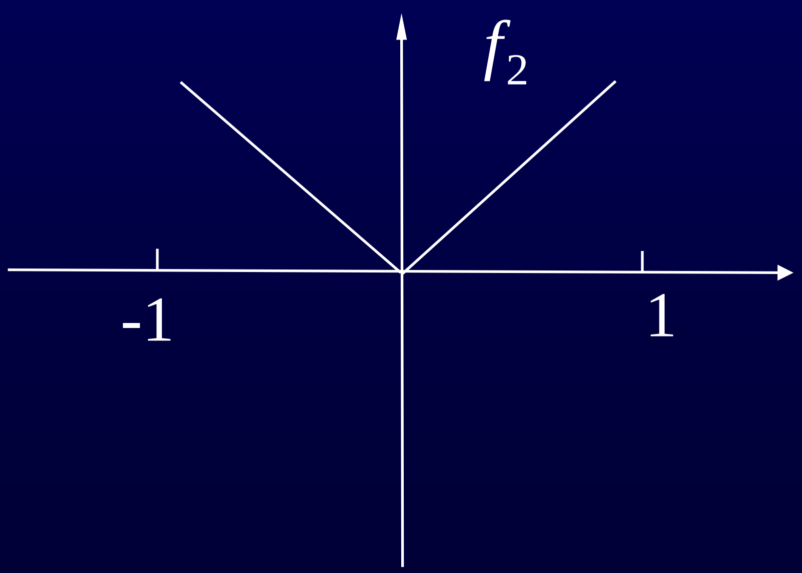
由定义，考虑方程 $t=\alpha t^2, \forall t\in[0,1]$。这样的非零常数$\alpha$ 不存在，因此，它们在$[0,\ 1]$上线性无关。

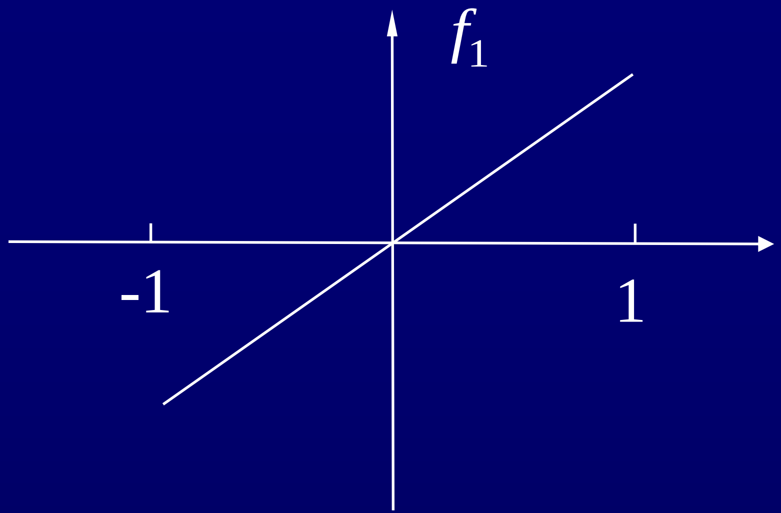
例2-1 讨论定义在$[-1,1]$上的两个连续函数 f_1 和 f_2 分别在 $[-1,0],[0,1],[-1,1]$ 上的线性相关性和线性无关性：

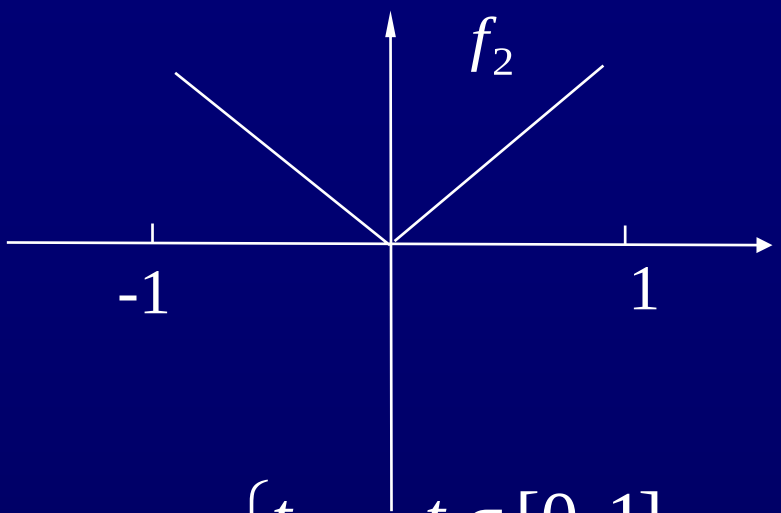
$$f_1(t)=t,\quad t\in[-1,1]$$

$$f_2(t)=\begin{cases} t, & t\in[0,1] \\ -t, & t\in[-1,0] \end{cases}$$









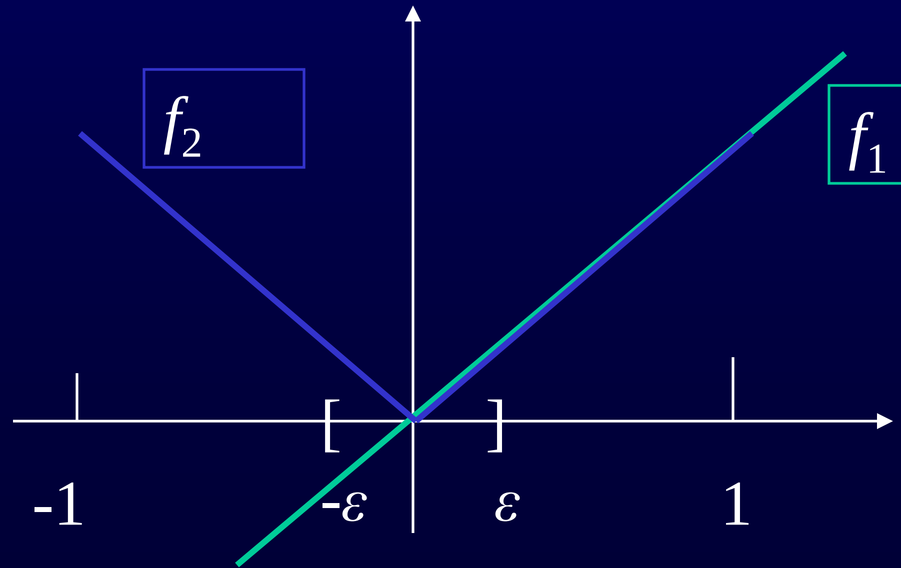
$$f_1(t)=t,\quad t\in[-1,1]$$

$$f_2(t)=\begin{cases} t, & t\in[0,1] \\ -t, & t\in[-1,0] \end{cases}$$

解： 考虑是否有 $f_1(t)=\alpha f_2(t)$？

- $[0,1]$上，$\alpha=1$， $f_1(t)$、$f_2(t)$ 在$[0,1]$上线性相关；
- $[-1,0]$上，$\alpha=-1$， $f_1(t)$、$f_2(t)$ 在$[-1,0]$上线性相关；
- $[-1,1]$上， 这样的常数α不存在，故 $f_1(t)$、$f_2(t)$ 在$[-1,1]$上线性无关。

从例2可见，虽然一个函数组在某个时间区间$[t_1,t_2]$上是线性无关的，但在$[t_1,t_2]$ 中的某个子区间上却可以是线性相关的。**在$[t_1,t_2]$上一定存在其子区间，函数组在这个子区间上是线性无关的，而且在包含这个子区间的任何区间上都是线性无关的。**在上述例子中，$[-\varepsilon, \varepsilon]$ 就是这样的子区间，这里ε 是小于1的任何正数。



结论：若一组连续函数$f_1(t), f_2(t)$，…，$f_n(t)$在某个区间$[t_1, t_2]$上是线性无关的，则这组函数在任何包含$[t_1, t_2]$的区间：

$$[t_a, t_b] \supset [t_1, t_2]$$

上均是线性无关的。

证明：反证法。

2. 向量情形：

令$\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, …, $\mathbf{f}_n$ 为 复值向量函数，若存在不全为零的复数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ ，使得

$$\alpha_1\mathbf{f}_1(t)+\alpha_2\mathbf{f}_2(t)+\cdots+\alpha_n\mathbf{f}_n(t)=0 \quad \forall t\in[t_1, t_2]$$

则称复值向量函数 组$\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, …, $\mathbf{f}_n$ 在 $[t_1, t_2]$ 上**线性相关**。否则，称为**线性无关**。

复值向量函数组 $\mathbf{f}_1$，$\mathbf{f}_2$，…，$\mathbf{f}_n$ 在$[t_1, t_2]$上线性无关，当且仅当

$$[\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n]\begin{bmatrix}\mathbf{f}_1\\ \mathbf{f}_2\\ \vdots\\ \mathbf{f}_n\end{bmatrix} := \boldsymbol{\alpha}\mathbf{F}(t) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

其中

$$\alpha := [\alpha_1\ \alpha_2\ \cdots\ \alpha_n], \quad \mathbf{F}(t) := \begin{bmatrix}\mathbf{f}_1\\ \mathbf{f}_2\\ \vdots\\ \mathbf{f}_n\end{bmatrix}$$

二、$Gram$ 矩阵

定义2-2 设 $\mathbf{f}_1$，$\mathbf{f}_2$，…，$\mathbf{f}_n$ 是定义在$[t_1，t_2]$上的p维复值向量函数，$\mathbf{F}$是由 $\mathbf{f}_i$ 构成的$n\times p$矩阵。则称

$$\mathbf{W}(t_1,t_2)_{n\times n}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}(t)\mathbf{F}^*(t)dt$$

为$\mathbf{f}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ 在$[t_1，t_2]$上的$Gram$矩阵。

定理2-1 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$在$[t_1，t_2]$上线性无关的**充分必要条件**是$\mathbf{W}(t_1，t_2)$非奇异。

证明：充分性：反证法。

若 $\mathbf{f}_i$ 线性相关，则存在非零行向量α，使得

$$\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{F}(t) = 0 \qquad \forall t \in [t_1, t_2]$$

因此有

$$\alpha \cdot \mathbf{W}(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \alpha \cdot \mathbf{F}(t)\mathbf{F}^*(t)dt = 0$$

即 $\mathbf{W}(t_1, t_2)$ 行线性相关 $\Rightarrow \det \mathbf{W}(t_1, t_2) = 0$ ，矛盾。

必要性。 反证法。设 $\mathbf{f}_i$ 在$[t_1,t_2]$上线性无关，但$\mathbf{W}(t_1,t_2)$ 奇异。故必存在一个非零行向 量α，使得

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{W}(t_1,t_2)=0$$

或者

$$\alpha\cdot\mathbf{W}(t_1,t_2)\alpha^*=\int_{t_1}^{t_2}[\alpha\mathrm{F}(t)][\alpha\mathrm{F}(t)]^*dt=0$$

因为对于$[t_1, t_2]$中所有t，被积函数

$$[\alpha\mathbf{F}(t)][\alpha\mathbf{F}(t)]^*$$

是非负的连续函数，故前式意味着

$$\alpha\mathbf{F}(t)=0\quad\forall t\in[t_1,t_2]$$

矛盾。 **证完。**

例： 令$f_1(t)=t$, $f_2(t)=t^2$。讨论它们在[0, 1]上的线性相关性。令

$$\mathbf{F}(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}$$

考虑$Gram$矩阵：

$$\mathbf{W}(t_0,t_1)=\mathbf{W}(0,1)=\int_{\mathbf{0}}^{1}\mathbf{F}(t)\mathbf{F}^*(t)=\int_0^1\begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}[t \quad t^2]dt$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

三、一些有用的判别准则

定理2-2 设 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ 是定义在$[t_1, t_2]$上的复值向量函数，且有一直到 $(n-1)$阶的连续导数。令$\mathbf{F}$表示这些向量构成的$n\times p$矩阵，$\mathbf{F}^{(k)}$ 表示 $\mathbf{F}$ 的第 k 阶导数。若在$[t_1, t_2]$ 上**存在**某个数 t_0，使得如下 $n\times np$ 矩阵：

$$rank[\mathbf{F}(t_0)\ \mathbf{F}^{(1)}(t_0) \cdots \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)] = n \quad (A.1)$$

则在$[t_1, t_2]$上，$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ 在复数域上线性无关。

例： $\mathbf{F}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} \forall t \in [0,1] \Rightarrow [\mathbf{F}(t) \quad \mathbf{F}'(t)] = \begin{bmatrix} t & 1 \\ t^2 & 2t \end{bmatrix}$

证明： 用反证法。若式(A.1)成立，但$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$在$[t_1,t_2]$上线性相关，则存在非零行向量$\alpha$，使得

$$\alpha\mathbf{F}(t)=0, \forall t\in[t_1,t_2]$$

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{F}^{(k)}(t)=0, \forall t\in[t_1,t_2], k=1,2,\cdots,n-1$$

因 $t_0\in[t_1,t_2]$，故

$$\alpha\cdot[\mathbf{F}(t_0)\quad \mathbf{F}^{(1)}(t_0)\quad \cdots\quad \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)]=0$$

这说明矩阵 $[\mathbf{F}(t_0)\quad \mathbf{F}^{(1)}(t_0)\quad \cdots\quad \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)]$ 行线性相关，其秩小于n，这与假设相矛盾。 **证完**

例2-2 设定义在[−1, 1]上的两个函数$f_1(t)= t^3$, $f_2(t)=\left|t^3\right|$，它们在[–1，1]上线性无关，但可验证

$$rank\begin{bmatrix} f_1(t) & f_1^{(1)}(t) \\ f_2(t) & f_2^{(1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & 3t^2 \\ t^3 & 3t^2 \end{bmatrix} < 2, \quad \forall t \in (0,1]$$

$$rank\begin{bmatrix} f_1(t) & f_1^{(1)}(t) \\ f_2(t) & f_2^{(1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & 3t^2 \\ -t^3 & -3t^2 \end{bmatrix} < 2, \quad \forall t \in [-1,0)$$

$$rank\begin{bmatrix} f_1(t) & f_1^{(1)}(t) \\ f_2(t) & f_2^{(1)}(t) \end{bmatrix}_{t=0} = 0$$

找不到 t_0, 使得 $rank[\mathbf{F}(t_0)\ \mathbf{F}^{(1)}(t_0) \cdots \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)] = n$

定理2-3 假设对每个 i, $\mathbf{f}_i$ 在$[t_1，t_2]$上解析，t_0是 $[t_1，t_2]$ 中的任一固定点。则向量函数组 $\mathbf{f}_i$ 在 $[t_1，t_2]$ 上线性无关的**充分必要条件**是

$$rank[\mathbf{F}(t_0)\ \mathbf{F}^{(1)}(t_0)\cdots\mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)\cdots]=n \quad (2-6)$$

证明： 只需证明 **必要性：** 反证法。

若不然，设 $\mathbf{f}_i$ 在$[t_1，t_2]$上线性无关，但却有

$$rank[\mathbf{F}(t_0)\ \mathbf{F}^{(1)}(t_0)\cdots\mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)\cdots]<n$$

$\Rightarrow \exists\boldsymbol{\alpha}\neq 0$, 使得

$$\boldsymbol{\alpha}[\mathbf{F}(t_0)\ \mathbf{F}^{(1)}(t_0)\cdots\mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)\cdots]=0$$

$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}\mathbf{F}^{(j)}(t_0)=0,\ j=0,1,\cdots$

因为$\mathbf{f}_{\mathbf{i}}$ 在$[t_1，t_2]$上解析，

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0, \text{使得} \ \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon],$$

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} \mathbf{F}^{(n)}(t_0)$$

$$\Rightarrow \alpha \mathbf{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t - t_0)^n}{n!} \alpha \mathbf{F}^{(n)}(t_0) \equiv 0, \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon],$$

$$\Rightarrow \alpha \mathbf{F}(t) = 0, \ \forall t \in [t_1, t_2] \text{（解析开拓）},$$

$\Rightarrow$ 与 $\mathbf{f}_i$ 在$[t_1，t_2]$上线性无关的假设相矛盾。**证完。**

作为定理2-3的一个直接推论，我们有

推论1： 若 $\mathbf{f_i}\ (i=1,\cdots,n)$在$[t_1$，$t_2]$上解析且线性无 关，则对所有 $t\in[t_1,t_2]$ ，有

$$rank[\mathbf{F}(t)\ \mathbf{F}^{(1)}(t)\cdots\mathbf{F}^{(n-1)}(t)\cdots]=n$$

推论2： 若向量组$\mathbf{f_i}$ 在$[t_1$，$t_2]$上解析且线性无关，则$\mathbf{f_i}$ 在$[t_1$，$t_2]$的每一个**子区间**上也线性无关。

注意: (1). (2-6) 是无穷矩阵。

(2). t 是$[t_1$，$t_2]$ 中的任一固定点！

例2-3： 令

$$\mathbf{F}(t)=\begin{bmatrix}\sin 1000t\\ \sin 2000t\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{F}(t) & \mathbf{F}^{(1)}(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sin 1000t & 10^3\cos 1000t \\ \sin 2000t & 2\times 10^3\cos 2000t\end{bmatrix}$$

易见，当$t=0,\pm\dfrac{\pi}{1000},\cdots$ 时，$rank[\mathbf{F}(\mathrm{t})\ \mathbf{F}^{(1)}(\mathrm{t})]<2$。

而对所有的t有 $rank[\mathbf{F}(t)\ \mathbf{F}^{(1)}(t)\ \mathbf{F}^{(2)}(t)\ \mathbf{F}^{(3)}(t)]=2$

定理：设 $\mathbf{f}_{\mathbf{i}}$ $(i=1,2,\ldots n)$ 在$[t_1，t_2]$上解析，则 $\mathbf{f}_{\mathbf{i}}$ 在$[t_1，t_2]$上线性无关的**充分必要条件**是在$[t_1，t_2]$上几乎处处有

$$rank[\mathbf{F}(t)\ \mathbf{F}^{(1)}(t)\cdots\mathbf{F}^{(n-1)}(t)]=n$$

例： 给定函数

$$f_1(t)=\sin t,\quad f_2(t)=\cos t,\quad f_3(t)=\sin 2t$$

讨论它们是否在 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关。

解： 由于这三个函数都是$(-\infty,+\infty)$ 上的解析函数，考虑利用以上定理。定义向量：

$$\mathbf{F}(t)=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin 2t \end{bmatrix}$$

考虑下列矩阵：

$$[\mathbf{F}(t)\quad \mathbf{F}'(t)\quad \mathbf{F}''(t)]=\begin{bmatrix} \sin t & \cos t & -\sin t \\ \cos t & -\sin t & -\cos t \\ \sin 2t & 2\cos 2t & -4\sin 2t \end{bmatrix}$$

取$t=\dfrac{\pi}{4}$，代入上式，有

$$\begin{bmatrix} \sin t & \cos t & -\sin t \\ \cos t & -\sin t & -\cos t \\ \sin 2t & 2\cos 2t & -4\sin 2t \end{bmatrix}_{t=\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

故这三个函数在$(-\infty, +\infty)$上线性无关。但若取

$t=0$或$\dfrac{\pi}{2}$，所得到的矩阵都是降秩的。