# 第四讲

# 线性系统的可控性及其判别

## 一、一组给定函数在某个区间上的线性相关性

**定理2-1** $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$在$[t_1, t_2]$上线性无关的**充分必要条件**是$\mathbf{W}(t_1, t_2)$非奇异, 其中

$$\mathbf{W}(t_1,t_2)_{n\times n}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}(t)\mathbf{F}^*(t)dt,\quad \mathbf{F}(t):=\begin{bmatrix}\mathbf{f}_1\\ \mathbf{f}_2\\ \vdots\\ \mathbf{f}_n\end{bmatrix}$$

## 三、一些有用的判别准则

**定理2-2** 设 $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ 是定义在$[t_1, t_2]$上的复值向量函数，且有一直到 $(n-1)$阶的连续导数。令$\mathbf{F}$表示这些向量构成的$n\times p$矩阵，$\mathbf{F}^{(k)}$ 表示 $\mathbf{F}$ 的第 $k$ 阶导数。若在$[t_1, t_2]$ 上存在某个数 $t_0$，使得如下 $n\times np$ 矩阵：

$$rank[\mathbf{F}(t_0)\ \mathbf{F}^{(1)}(t_0)\cdots\mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)]=n \quad (A.1)$$

则在$[t_1, t_2]$上， $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$ 在复数域上线性无关。

**例：** $\mathbf{F}(t)=\begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix}\forall t\in[0,1]\Rightarrow[\mathbf{F}(t)\quad \mathbf{F}'(t)]=\begin{bmatrix} t & 1 \\ t^2 & 2t \end{bmatrix}$

**证明：** 用反证法。若式(A.1)成立，但$\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \ldots, \mathbf{f}_n$在$[t_1,t_2]$上线性相关，则存在非零行向量$\alpha$，使得

$$\alpha\mathbf{F}(t)=0, \forall t\in[t_1,t_2]$$

$$\boldsymbol{\alpha}\mathbf{F}^{(k)}(t)=0, \forall t\in[t_1,t_2], k=1,2,\cdots,n-1$$

因 $t_0\in[t_1,t_2]$，故

$$\alpha\cdot[\mathbf{F}(t_0)\quad \mathbf{F}^{(1)}(t_0)\quad \cdots\quad \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)]=0$$

这说明矩阵$[\mathbf{F}(t_0)\quad \mathbf{F}^{(1)}(t_0)\quad \cdots\quad \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)]$行线性相关，其秩小于$n$，这与假设相矛盾。 **证完**

**例2-2** 设定义在[−1, 1]上的两个函数$f_1(t)= t^3$, $f_2(t)=\left|t^3\right|$，它们在[−1，1]上线性无关，但可验证

$$rank\begin{bmatrix} f_1(t) & \vdots & f_1^{(1)}(t) \\ f_2(t) & \vdots & f_2^{(1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & 3t^2 \\ t^3 & 3t^2 \end{bmatrix} < 2, \quad \forall t \in (0,1]$$

$$rank\begin{bmatrix} f_1(t) & \vdots & f_1^{(1)}(t) \\ f_2(t) & \vdots & f_2^{(1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^3 & 3t^2 \\ -t^3 & -3t^2 \end{bmatrix} < 2, \quad \forall t \in [-1,0)$$

$$rank\begin{bmatrix} f_1(t) & \vdots & f_1^{(1)}(t) \\ f_2(t) & \vdots & f_2^{(1)}(t) \end{bmatrix}_{t=0} = 0$$

找不到 $t_0$, 使得 $rank[\mathbf{F}(t_0)\ \mathbf{F}^{(1)}(t_0) \cdots \mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)] = n$

**定理2-3** 假设对每个 $i$，$\mathbf{f}_i$ 在$[t_1, t_2]$上解析，$t_0$是 $[t_1, t_2]$ 中的任一固定点。则向量函数组 $\mathbf{f}_i$ 在 $[t_1, t_2]$ 上线性无关的**充分必要条件**是

$$rank[\mathbf{F}(t_0)\ \mathbf{F}^{(1)}(t_0)\cdots\mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)\cdots]=n \quad (2-6)$$

**证明：** 只需证明 **必要性：** 反证法。

若不然，设 $\mathbf{f}_i$ 在$[t_1, t_2]$上线性无关，但却有

$$rank[\mathbf{F}(t_0)\ \mathbf{F}^{(1)}(t_0)\cdots\mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)\cdots]<n$$

$\Rightarrow \exists\boldsymbol{\alpha}\neq 0,$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha}[\mathbf{F}(t_0)\ \mathbf{F}^{(1)}(t_0)\cdots\mathbf{F}^{(n-1)}(t_0)\cdots]=0$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha}\mathbf{F}^{(j)}(t_0)=0,\ j=0,1,\cdots$$

因为$\mathbf{f}_i$ 在[$t_1$，$t_2$]上解析,

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0$, 使得 $\forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$,

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \mathbf{F}^{(n)}(t_0)$$

$$\Rightarrow \alpha\mathbf{F}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^n}{n!} \alpha\mathbf{F}^{(n)}(t_0) \equiv 0, \forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon],$$

$\Rightarrow \alpha\mathbf{F}(t) = 0, \forall t \in [t_1, t_2]$（解析开拓）,

$\Rightarrow$ 与 $\mathbf{f}_i$ 在[$t_1$，$t_2$]上线性无关的假设相矛盾。**证完。**

作为定理2-3的一个直接推论，我们有

**推论1：** 若 $\mathbf{f_i}\ (i=1,\cdots,n)$在$[t_1$，$t_2]$上解析且线性无 关，则对所有 $t\in[t_1,t_2]$ ，有

$$rank[\mathbf{F}(t)\ \mathbf{F}^{(1)}(t)\cdots\mathbf{F}^{(n-1)}(t)\cdots]=n$$

**推论2：** 若向量组$\mathbf{f_i}$ 在$[t_1$，$t_2]$上解析且线性无关，则$\mathbf{f_i}$ 在$[t_1$，$t_2]$的每一个**子区间**上也线性无关。

**注意:** (1). (2-6) 是无穷矩阵。
(2). $t$ 是$[t_1$，$t_2]$ 中的任一固定点！

**例2-3：** 令

$$\mathbf{F}(t)=\begin{bmatrix}\sin 1000t\\ \sin 2000t\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{F}(t) & \mathbf{F}^{(1)}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin 1000t & 10^3 \cos 1000t \\ \sin 2000t & 2\times 10^3 \cos 2000t \end{bmatrix}$$

易见，当$t=0,\pm\dfrac{\pi}{1000},\cdots$ 时，$rank[\mathbf{F}(\mathrm{t})\ \mathbf{F}^{(1)}(\mathrm{t})] < 2$。

而对所有的$t$有 $rank[\mathbf{F}(t)\,\mathbf{F}^{(1)}(t)\,\mathbf{F}^{(2)}(t)\,\mathbf{F}^{(3)}(t)] = 2$

**定理：**设 $\mathbf{f}_i$ ($i$=1,2,…$n$) 在[$t_1$，$t_2$]上解析，则 $\mathbf{f}_i$ 在[$t_1$，$t_2$]上线性无关的**充分必要条件**是在[$t_1$，$t_2$]上几乎处处有

$$rank[\mathbf{F}(t)\,\mathbf{F}^{(1)}(t)\cdots\mathbf{F}^{(n-1)}(t)] = n$$

**例：** 给定函数

$$f_1(t)=\sin t,\quad f_2(t)=\cos t,\quad f_3(t)=\sin 2t$$

讨论它们是否在 $(-\infty,+\infty)$ 上线性无关。

**解：** 由于这三个函数都是 $(-\infty,+\infty)$ 上的解析函数，考虑利用以上定理。定义向量：

$$\mathbf{F}(t)=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \\ \sin 2t \end{bmatrix}$$

考虑下列矩阵：

$$[\mathbf{F}(t)\quad \mathbf{F}'(t)\quad \mathbf{F}''(t)]=\begin{bmatrix} \sin t & \cos t & -\sin t \\ \cos t & -\sin t & -\cos t \\ \sin 2t & 2\cos 2t & -4\sin 2t \end{bmatrix}$$

取$t=\dfrac{\pi}{4}$，代入上式，有

$$\begin{bmatrix} \sin t & \cos t & -\sin t \\ \cos t & -\sin t & -\cos t \\ \sin 2t & 2\cos 2t & -4\sin 2t \end{bmatrix}_{t=\frac{\pi}{4}} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

故这三个函数在$(-\infty, +\infty)$上线性无关。但若取$t=0$或$\dfrac{\pi}{2}$，所得到的矩阵都是降秩的。

# 线性系统的可控性

## 一、可控性的定义及判别定理

### 1.可控性的定义

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$

一个非零状态$\mathbf{x}(t_0)$在$t_0$时刻可控---一个状态的可控性；

系统在$t_0$时刻是可控的---完全可控性；

对于时不变系统，

一个非零状态$\mathbf{x}$可控性---一个状态的可控性；

系统可控性---完全可控性；

# 线性系统的可控性

## 一、可控性的定义及判别定理

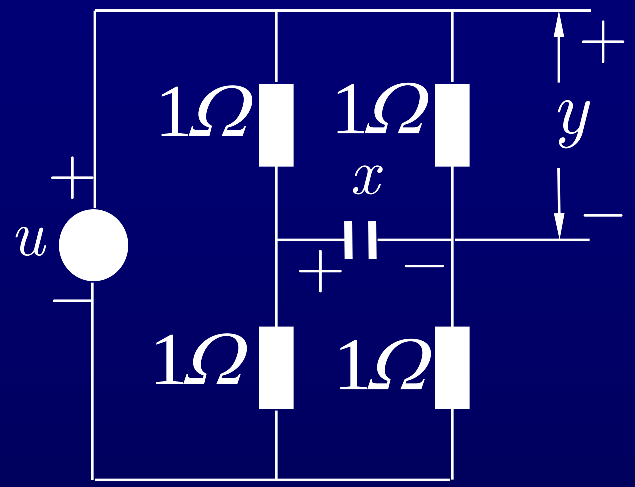
### 1.可控性的定义

**定义2-3:**若对状态空间的**任一非零状态** $\mathbf{x}(t_0)$，都存在一个有限时刻 $t_1 > t_0$ 和一个容许控制 $\mathbf{u}_{[t0,\ t1]}$，能在$t_1$时刻使状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 转移到零，则称状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \qquad (2-7)$$

在$t_0$时刻是可控的。反之称为在 $t_0$ 时刻不可控。

**例2-4：**考虑由如下网络组成的系统：




令初始时刻电容两端的电压$x(t_0)$不为零，则网络的对称性使得无论施加何种控制均无法在有限时刻$t_1$使$x(t_1)=0$。根据以上定义，系统在$t_0$不可控。

**关于定义的几点说明：**

1. **无约束容许控制**
2. **有限时间**
3. **状态空间中任何初态转移到零状态**
4. **系统的不可控性** 只要存在一个非零初态，都不能找到一个容许控制，在有限时间内将这个状态 $x(t_0)$ 控制到 $x(t_1)=0$。
5. **到达原点的可控性** 定常连续时间系统到达原点的可控性与状态空间的任何状态转移到另一任意状态是等价的。

## 2. 可控性的一般判别准则

**定理2-4**状态方程

$$\dot{x} = \mathbf{A}(t)x + \mathbf{B}(t)u \qquad (2-7)$$

在$t_0$可控，充分必要条件：存在一个有限时间 $t_1 > t_0$，使矩阵$\mathbf{\Phi}(t_0,\tau)\mathbf{B}(\tau)$的 $n$个行在$[t_0, t_1]$上线性无关。

**证明：充分性。**证明是构造性的，思路如下：

**1.** 注意到$\mathbf{\Phi}(t_0,\tau)\mathbf{B}(\tau)$的$n$行在$[t_0,t_1]$上线性无关$\Leftrightarrow$

$$\mathbf{W}(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{\Phi}(t_0,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{B}^*(\tau)\mathbf{\Phi}^*(t_0,\tau)d\tau \tag{2-8}$$

为非奇异。 $\mathbf{W}(t_0, t_1)$ **称为可控性Gram矩阵。**

**2.** 对于任给的 $x(t_0)$，构造如下控制输入

$$u(t)=-\mathbf{B}^*(t)\mathbf{\Phi}^*(t_0,t)\mathbf{W}^{-1}(t_0,t_1)x(t_0)$$

$$t\in[t_0,t_1] \quad (2-9)$$

可以证明，(2-9)式所定义的$u(t)$能在 $t_1$ 时刻将$x(t_0)$转移到 $x(t_1)=0$。

**必要性。**反证法。

设在$t_0$时刻系统可控，但对任何$t_1>t_0$， $\mathbf{\Phi}(t_0,\tau)\mathbf{B}(\tau)$ 在 $[t_0$， $t_1]$上都是线性相关的，

$$\Rightarrow \exists \alpha \neq 0, \ \alpha\mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{B}(t)=0 \forall t \in [t_0,t_1]$$

又由系统在$t_0$时刻可控，当取$x(t_0)=\alpha^*$时，存在有限时刻$t_1>t_0$和$u_{[t_0,\ t_1]}$,使$x(t_1)=0$，即

$$x(t_1)=\mathbf{\Phi}(t_1,t_0)[\alpha^*+\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{\Phi}(t_0,\tau)\mathbf{B}(\tau)u(\tau)d\tau]=0$$

$$\Rightarrow \alpha^* = -\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{\Phi}(t_0,\tau)\mathbf{B}(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow \alpha\alpha^*=0 \Rightarrow \alpha=0$$ 矛盾。 **证完。**

**推论2-4** 状态方程（2-7）在$t_0$可控的充分必要条件是存在有限时刻 $t_1 > t_0$ 使得$\mathbf{W}(t_0, t_1)$ 为非奇异。

**例：**讨论如下系统在任意时刻$t_0$的可控性:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-2t} \end{bmatrix} u \quad \text{(I)},$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t} \end{bmatrix} u \quad \text{(II)}$$

$$\text{由}\mathcal{L}^{-1}\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \Phi(t,t_0)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(t-t_0)} \end{bmatrix}$$

故

$$\Phi(t_0,\tau)b_1(\tau)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(t_0-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-2\tau} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t_0}e^{-\tau} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

$$\Phi(t_0,\tau)b_2(\tau)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-(t_0-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-\tau} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t_0} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$$

再来判断 $f_1$ 和 $f_2$ 的线性无关性，得到系统的可控性。

## 3. 可控性的一个实用判据

为了应用上面的结果，必须知道 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$ 的状态转移矩阵$\Phi(t, t_0)$，这是一件困难的工作。

假定$\mathbf{A}(t)$,$\mathbf{B}(t)$是$(n-1)$次连续可微的函数矩阵，定义矩阵序列 $\mathbf{M}_0$, $\mathbf{M}_1$, …, $\mathbf{M}_{n-1}$如下：

$$\mathbf{M}_0(t) = \mathbf{B}(t)$$

$$\mathbf{M}_k(t) = -\mathbf{A}(t)\mathbf{M}_{k-1}(t) + \frac{d\mathbf{M}_{k-1}(t)}{dt} \qquad k = 1, 2, \cdots, n-1$$

易于验证，以上矩阵序列满足：

$$\frac{\partial^k \Phi(t_0, t)\mathbf{B}(t)}{\partial t^k} = \Phi(t_0, t)\mathbf{M}_k(t)$$

**定理2—5** 设矩阵$\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$是$(n-1)$次连续可微的。若**存在有限**时间$t_1>t_0$,使得

$$rank[\mathbf{M}_0(t_1) \quad \mathbf{M}_1(t_1) \quad \cdots \quad \mathbf{M}_{n-1}(t_1)] = n$$

则状态方程（2.7）在$t_0$ 时刻可控。

**证明：** 根据定理2-3只要证明存在一个$t_1>t_0$，使得

$$\mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{B}(t)\forall t\in[t_0,t_1]$$

行线性无关就可以了。 用反证法，若相关，则

$$\Rightarrow \exists\alpha\neq 0,\ \ \alpha\mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{B}(t)=0\forall t\in[t_0,t_1]$$

求导并取t=t1，得到

$$\alpha[\mathbf{\Phi}(t_0,t_1)\mathbf{B}(t_1) \quad \left.\frac{\partial\mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{B}(t)}{\partial t}\right|_{t=t_1} \quad \cdots \quad \left.\frac{\partial^{n-1}\mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{B}(t)}{\partial t^{n-1}}\right|_{t=t_1}]$$

$$= \alpha\mathbf{\Phi}(t_0,t_1)[\mathbf{M}_0(t_1) \quad \mathbf{M}_1(t_1) \quad \cdots \quad \mathbf{M}_{n-1}(t_1)] = 0$$

由又状态转移矩阵的非奇异性

$$rank[\mathbf{M}_0(t_1) \quad \mathbf{M}_1(t_1) \quad \cdots \quad \mathbf{M}_{n-1}(t_1)] < n$$

矛盾！所以有$\Phi(t_0,\tau)\mathbf{B}(\tau)$在$[t_0, t_1]$上行线性无关。**证完。**

**例2—7** 讨论如下系统的可控性：

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

直接计算得到：

$$\mathbf{M}_0(t) = \mathbf{B}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1(t) = -\mathbf{A}(t)\mathbf{M}_0(t) + \frac{d}{dt}\mathbf{M}_0(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -t \\ -t^2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{M}_2(t) = -\mathbf{A}(t)\mathbf{M}_1(t) + \frac{d}{dt}\mathbf{M}_1(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 \\ t^4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t^2 - 1 \\ t^4 - 2t \end{pmatrix}$$

$$[\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2 \quad \mathbf{M}_3] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2t \\ 1 & -t & t^2 - 1 \\ 1 & -t^2 & t^4 - 2t \end{pmatrix}$$

易于验证，上述矩阵的行列式

$$t^4 - 2t^3 + t^2 - 2t + 1$$

对某个 $t$ 非零，故系统对任意 $t_0, t < t_0$ 是可控的。

**注：**

该定理无需计算状态转移矩阵。但仅是一个充分条件；

**例2-8** 设定义在[−1, 1]上的两个函数$f_1(t)= t^3$, $f_2(t)=\left|t^3\right|$，

它们在[–1，1]上线性无关，但可验证

$$rank\begin{bmatrix} f_1(t) & f_1^{(1)}(t) \\ f_2(t) & f_2^{(1)}(t) \end{bmatrix} < 2, \quad \forall t \in [-1, 1]$$

找不到 $t_0$, 使得 $rank[\mathbf{F}(t_0)\ \mathbf{F}^{(1)}(t_0)] = n$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t)u \\ \dot{x}_2 &= f_2(t)u \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_0(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1(t) = -\mathbf{A}(t)\mathbf{M}_0(t) + \frac{d}{dt}\mathbf{M}_0(t) = \begin{bmatrix} f_1{}'(t) \\ f_2{}'(t) \end{bmatrix}$$

但由定理2.4可以直接判断系统在$t_0$时刻是可控的。

## 二、可达性的概念

**定义2—4**　若对$t_0$时刻状态空间中的**任一**非零状态$x(t_0)$，存在一个有限时刻$t_1<t_0$和一个容许控制，能在$[t_1,t_0]$内使状态$x(t_1)=0$转移到$x(t_0)$，则称状态方程（2-7）在$t_0$时刻是可达的(**起于原点的可控性**)。

**可达**


**可控**


若以相同的$t_0$作为参考点，则在$t_0$时刻可控和可达在时间区间上是不同的。

完全类似于可控性的讨论，如下结论为显然：

**定理：** 状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{x} + \mathbf{B}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{u} \qquad (2-7)$$

在 $t_0$ 时刻可达的充分必要条件是存在有限的 $t_1 < t_0$，使得

$$\mathbf{\Phi}(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)$$

在 $[t_1，t_0]$ 上行线性无关，或等价地，下列**可达性Gram矩阵**非奇异（$t_1 < t_0$）：

$$\mathbf{Y}(t_1, t_0) = \int_{t_1}^{t_0} \mathbf{\Phi}(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{B}^*(\tau)\mathbf{\Phi}^*(t_0, \tau)d\tau$$

**这里只考虑充分性证明：**

$$x(t_0) = \mathbf{\Phi}(t_0, t_1)[x(t_1) + \int_{t_1}^{t_0} \mathbf{\Phi}(t_1, \tau)\mathbf{B}(\tau)u(\tau)d\tau]$$

$$\Rightarrow x(t_1) = \mathbf{\Phi}(t_1, t_0)x(t_0) - \int_{t_1}^{t_0} \mathbf{\Phi}(t_1, \tau)\mathbf{B}(\tau)u(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow x(t_1) = \mathbf{\Phi}(t_1, t_0)\{x(t_0) - \int_{t_1}^{t_0} \mathbf{\Phi}(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)u(\tau)d\tau\}$$

只要取$\mathbf{u} = \mathbf{B}^*(\tau)\mathbf{\Phi}^*(t_0, \tau)\mathbf{Y}^{-1}(t_1, t_0)x(t_0)$即可。

## 三、时不变系统的可控性判据

考虑时不变系统

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad (2-13)$$

的可控性问题。

**定理2-6** 对于$n$ 维线性时不变系统（2-13），下列提法等价:

(1) 在[0，+∞ )中的每一个 $t_0$,（2–13）可控;

(2) $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}$（也即$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$）的行在[0，+∞)上是复数域行线性无关的;

(3)对于任何$t_0 \geq 0$ 及任何 $t > t_0$，矩阵

$$\mathbf{W}(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}^* e^{\mathbf{A}^*(t_0-\tau)} d\tau$$

非奇异;

(4) $rank[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \ldots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n$ ；（2-14）

(5) 在复数域上，矩阵$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$的行是线性无关的;

(6) 对于$\mathbf{A}$ 的任一特征值 $\lambda_i$ ，都有

$$rank[\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I} \quad \mathbf{B}] = n \qquad (2-15)$$

**证明的主要思路：**

$$
\begin{array}{lll}
(1) \Leftrightarrow & (2)_{\text{step 1}} & \Leftrightarrow (5)_{\text{step 2}} \\
\Updownarrow & \Updownarrow & \\
(4)_{\text{step 4}} & (3)_{\text{step 3}} & \\
\Updownarrow & & \\
(6)_{\text{step 5}} & &
\end{array}
$$

证明（1）$\Leftrightarrow$（2），即下列命题的等价性：

(1) 在$[0, +\infty)$中的每一个 $t_0$,（$\mathbf{A}, \mathbf{B}$）可控；

(2) $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}$（也即$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$）的行在$[0, +\infty)$上是复数域行线性无关的。

证明：对任意$t_0 \in [0, \infty)$（$\mathbf{A}, \mathbf{B}$）可控

$$\Leftrightarrow \forall t_0, \ \exists 有限的 t_1 > t_0, \ \mathbf{\Phi}(t_0, \tau)\mathbf{B}(\tau)$$

$$= e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B} = e^{\mathbf{A}t_0} e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B} 在[t_0, t_1]行无关$$

$$\Leftrightarrow e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B} 在[t_0, t_1]行无关$$

$$\Leftrightarrow e^{-\mathbf{A}\tau}\mathbf{B} 在(-\infty, +\infty) 上行无关（解析函数故连续）$$

$$\Leftrightarrow e^{\mathbf{A}\tau}\mathbf{B} 在（-\infty, +\infty）行无关$$

所以，对于时不变系统，若其在一点可控，则其在[0，+∞）上处处可控，因此，可以忽略参考点$t_0$、$t_1$，我们只需要说$(\mathbf{A},\mathbf{B})$可控或不可控就可以了。

**（2）⇔（5）：即证明下列命题等价：**

(2) $e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{B}$（也即$e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$）的行在$[0, +\infty)$上是复数域行线性无关的。

(5) 在复数域上，矩阵$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$的行是线性无关的；

**证明：**注意到拉氏变换是一一对应的线性算子即可。

**（2）$\Leftrightarrow$（3）：即证明下列命题与(2)的等价性：**

(3)：对于任何$t_0 \geq 0$ 及任何 $t > t_0$，矩阵

$$\mathbf{W}(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}^* e^{\mathbf{A}^*(t_0-\tau)} d\tau$$

非奇异。

**证明：** $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ 的行在$[0, +\infty)$上行线性无关$\Leftrightarrow e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$ 对任意$[t_0, t] \subset [0, +\infty)$ 上行无关(解析函数，定理2-3推论2），根据推论2-4，命题成立。

**1$\Leftrightarrow$4的证明如下：**

1$\Rightarrow$4：系统可控，要证

$$rank\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = n$$

反证法。若

$$rank\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix} < n$$

$$\Rightarrow \exists \alpha \neq 0$$

$$\Rightarrow \alpha\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\mathbf{A}^{i}\mathbf{B} = 0,\ i = 1, 2, \cdots, n-1$$

利用(1-48) 式:

$$\left(\mathbf{\Phi}(t_0,\tau) = e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)} = \sum_{i=0}^{n-1} p_i(t_0-\tau)\mathbf{A}^{i} \qquad (1-48)\right)$$

$$\Rightarrow \alpha\mathbf{\Phi}(t_0,\tau)\mathbf{B}=\sum_{i=0}^{n-1}p_i(t_0-\tau)\alpha\mathbf{A}^i\mathbf{B}=0$$

$\Rightarrow \mathbf{\Phi}(t_0,\tau)\mathbf{B}$行线性相关，与可控矛盾。

**$1 \Leftarrow 4$：** 若

$$rank\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}=n$$

要证系统可控。反证法。若不可控，则对任意$t_0$及

$$\forall t_1>t_0, \exists\alpha\neq 0 \Rightarrow \alpha e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B}=0,\quad \tau\in[t_0,\quad t_1]$$

上式对$\tau$求导，再求导…，依次可得

$$\alpha e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{A}\mathbf{B}=0$$

$$\vdots$$

$$\alpha e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}=0$$

$$\vdots$$

令 $\tau=t_0$，有

$$\alpha\mathbf{B}=\alpha\mathbf{A}\mathbf{B}=\cdots=\alpha\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}=0$$

$$\Rightarrow\alpha\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}=0$$

与 $rank\begin{bmatrix}\mathbf{B} & \mathbf{A}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\end{bmatrix}=n$ 矛盾

**思考题：**试证明(2)与(4)的等价性。

**$4 \Leftrightarrow 6$的证明如下：**

$4 \Rightarrow 6$: 若

$$rank\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = n$$

要证

$$\forall \lambda_i \in \mathbf{A}(\sigma), \quad rank\begin{bmatrix} \mathbf{A}-\lambda_i \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = n$$

**反证法**。若有一个$\lambda_0$使

$$rank\begin{bmatrix} \mathbf{A}-\lambda_0 \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix} < n$$

$$\Rightarrow \exists \alpha \neq 0, 使得 \alpha\begin{bmatrix} \mathbf{A}-\lambda_0 \mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\begin{bmatrix} \mathbf{A}-\lambda_0 \mathbf{I} \end{bmatrix} = 0, \ \alpha\mathbf{B} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\mathbf{A} = \lambda_0 \alpha, \ \alpha\mathbf{B} = 0$$

考虑到

$$\alpha\mathbf{A}=\lambda_0\alpha,\ \alpha\mathbf{B}=0$$

有 $$\alpha\mathbf{AB}=\lambda_0\alpha\mathbf{B}=0$$

$$\alpha\mathbf{A}^2\mathbf{B}=\lambda_0\alpha\mathbf{AB}=0$$

$$\vdots$$

$$\alpha\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}=0$$

$$\Rightarrow \alpha[\mathbf{B}\quad \mathbf{AB}\quad \cdots\quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]=0$$

与$rank[\mathbf{B}\quad \mathbf{AB}\quad \cdots\quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]=n$ 矛盾。

$4 \Leftarrow 6$

$\forall \lambda_i \in \mathbf{A}(\sigma) \qquad rank\left[\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I} \quad \mathbf{B}\right]=n$，要证

$$rank[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]=n$$

用反证法。若不然，

$$rank[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]=n_1<n,$$

$$n-n_1:=k$$

我们要证明此时必有$\lambda_0 \in \mathbf{A}(\sigma)$，使得

$$rank\left[\mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{I} \quad \mathbf{B}\right]<n$$

**证明步骤如下：**

反证法。

假设(2-14)的可控性矩阵的秩为$n_1 < n$；
从中选取$n_1$个线性无关的列向量

$$\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \cdots, \mathbf{q}_{n_1}$$

作为变换阵的逆矩阵的前$n_1$列，再补充$n-n_1$个$n$维的列向量

$$\mathbf{q}_{n_1+1} \cdots \mathbf{q}_n$$

得到:

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \cdots & \mathbf{q}_{n_1} & \mathbf{q}_{n_1+1} & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} =: \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \cdots & \mathbf{p}_{n_1} & \mathbf{p}_{n_1+1} & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix}^T$$

即

$$\mathbf{P} =: \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 & \cdots & \mathbf{p}_{n_1} & \mathbf{p}_{n_1+1} & \cdots & \mathbf{p}_n \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n_1}^T \\ \mathbf{p}_{n_1+1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n^T \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p}_i^T\mathbf{q}_j = 0, \forall i \neq j; \mathbf{p}_i^T\mathbf{B} = \mathbf{0}, \forall i = n_1+1, \cdots, n$$

$$\mathbf{p}_i^T\mathbf{A}\mathbf{q}_j = 0, \forall i = n_1+1, \cdots, n; j = 1, \cdots, n_1$$

由$\mathbf{PAP}^{-1} = \bar{\mathbf{A}}$有

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & & * & * & & * \\ * & * & \cdots & * & * & & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & * & & * \\ * & * & & * & * & & * \\ 0 & 0 & & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & & 0 & * & & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 & * & & * \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \quad n_1$$

$p_i^T\mathbf{A}q_1$ $p_i^T\mathbf{A}q_2$ $p_i^T\mathbf{A}q_{n_1}$ $p_i^T\mathbf{A}q_{n_1+1}$ $p_i^T\mathbf{A}q_n$

同理，由$\mathbf{PB} = \bar{\mathbf{B}}$，且$\mathbf{p}_i^T \mathbf{B} = \mathbf{0}, \forall i = n_1 + 1, \cdots, n$

$$\mathbf{B} = [\mathbf{q}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{n_1} \quad \mathbf{q}_{n_1+1} \quad \cdots \quad \cdots \quad \mathbf{q}_n]$$

$$\bar{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & & * \\ * & * & & * \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ * & * & & * \\ \hdashline 0 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}}$$

1.归结如下结果：

**引理：** 若$rank[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n_1 < n$,则存在

等价变换 $\mathbf{PAP}^{-1}, \mathbf{PB}\ (\det(\mathbf{P}) \neq 0)$,使得

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ 0 & \mathbf{A}_4 \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{PB} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

其中，$\mathbf{A}_1$为$n_1 \times n_1$、$\mathbf{B}_1$为$n_1 \times p$阵，且

$$rank\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1\mathbf{B}_1 & \cdots & \mathbf{A}_1^{n-2}\mathbf{B}_1 & \mathbf{A}_1^{n-1}\mathbf{B}_1 \end{bmatrix} = n_1$$

**2. 利用上述引理，考虑矩阵**

$$\mathbf{P}[\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \quad \mathbf{B}]\begin{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}\begin{bmatrix}\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I} & \mathbf{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{P}^{-1} & 0\\ 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{A}}-\lambda\mathbf{I} & \bar{\mathbf{B}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1-\lambda\mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_1\\ 0 & \mathbf{A}_4-\lambda\mathbf{I}_k & 0\end{bmatrix}$$

令$\lambda=\lambda_0\in\mathbf{A_4}(\sigma)$,则将其代入上式后必有

$$rank\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1-\lambda\mathbf{I}_{n_1} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_1\\ 0 & \mathbf{A}_4-\lambda\mathbf{I}_k & 0\end{bmatrix}<n$$

$\Rightarrow rank\begin{bmatrix}\mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{I} & \mathbf{B}\end{bmatrix}<n$ 矛盾。**证完。**

**注1：**定理2-6**（秩判据）**是判断（A，B）可控性的最常用的判据。矩阵

$$\mathbf{U}=[\mathbf{B}\ \ \mathbf{AB},\ \ldots,\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

称为状态方程 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{Ax}+\mathbf{Bu}$ (2−13)

的**可控性矩阵**。

**注2：**关于定理2-6判据：

可以将$\forall\lambda_i\in\mathbf{A}(\sigma)$ 换为 $\forall s\in\mathbb{C}$ 还成立！

$$(\mathbf{A},\mathbf{B})\text{可控}\Leftrightarrow rank[\mathbf{A}-s\mathbf{I}\ \mathbf{B}]=n\ \forall s\in\mathbb{C}$$

称为 **PBH判据**，是由罗马尼亚学者Popov-Belevitch-Hautus 等三人提出的。

# 可控性判据小结

## 1. 时变线性系统：

**1）充分必要条件：**

$$(\mathbf{A}(t),\mathbf{B}(t))\text{在}t_0\text{可控}\Leftrightarrow\begin{cases}1)\ \exists\text{有限}t_1>t_0\text{，}\Phi(t_0,\tau)\mathrm{B}(\tau)\\ \quad\text{在}[t_0\text{，}t_1]\text{上行无关；}\\ 2)\exists\text{有限}t_1>t_0\text{，}\mathbf{W}(t_0,t_1)\\ \quad\text{非奇异}\end{cases}$$

**2）充分条件：**

$\exists$有限$t_1>t_0$，

$$rank[\mathbf{M}_0(t_1)\quad \mathbf{M}_1(t_1)\quad \cdots\quad \mathbf{M}_{n-1}(t_1)]=n$$

$(\mathbf{A}(t),\mathbf{B}(t))$在$t_0$可控.

## 时不变系统可控性判据:

$n$ 维线性系统 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ 可控与下列提法等价:

(1) $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$的行是复数域行线性无关的;

(2) 对任意 $t > t_0$，Gram矩阵

$$\mathbf{W}(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}^{*} e^{\mathbf{A}^{*}(t_0-\tau)} d\tau$$ 非奇异;

(3) $rank[\mathbf{B} \;\; \mathbf{A}\mathbf{B} \;\; \ldots \;\; \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n$

(4) 在复数域上，矩阵$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$的行是线性无关的;

(5) 对于$\mathbf{A}$ 的任一特征值 $\lambda_i$，都有 $rank[\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I} \;\; \mathbf{B}] = n$

(6) 对于任一复数$s$，都有 $rank[\mathbf{A} - s\mathbf{I} \;\; \mathbf{B}] = n$

# 时不变系统的振型（模态）、模式

## 1.振型（模态）与运动模式的定义

把**A**的特征值$\lambda_i$ 称为系统的**振型**或**模态**，把$e^{\mathbf{A}t}$中的

$$t^k e^{\lambda_i t}\ (k=0,1,2,\ldots,n_i,\ i=1,2,\ldots,m)$$

称为方程 $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ 与$\lambda_i$ 相对应的**运动模式。**

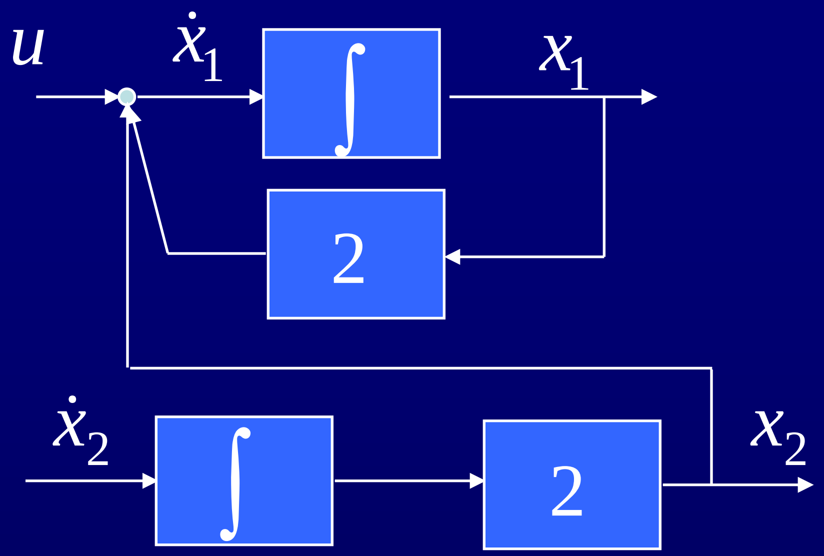
**定义：**使矩阵$[\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}\ \ \mathbf{B}]$ 满秩的$\lambda_i$ 称为**可控模态**；使矩阵$[\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}\ \ \mathbf{B}]$降秩的$\lambda_i$ 称为**不可控模态**。

- 不可控制模态所对应的运动模式与控制作用无耦合关系，因此不可控模态又称为系统的**输入解耦零点**。
- 一个线性时不变系统可控的充分必要条件是没有输入解耦零点。

**例：** 考虑系统 $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

有重根2。利用PBH检验法:$[\mathbf{A}-2\mathbf{I}\ \mathbf{b}]$,有

$$[\mathbf{A}-2\mathbf{I}\ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$ 系统不可控。由结构图可知:




可见，在这两个重根中，有一个模态是不可控的，另一个模态是可控的。事实上

$$x_2(t) = e^{2t} x_2(0)$$

与该不可控的模态2相对应的运动模式是$e^{2t}$，它与控制无耦合关系。