第五讲

可控性、可观测性

及其判别

时不变系统可控性判据:

n 维线性系统 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$ 可控与下列提法等价:

(1) $e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$的行是复数域行线性无关的;

(2) 对任意 $t>t_0$，Gram矩阵

$$\mathbf{W}(t_0,t)=\int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}^* e^{\mathbf{A}^*(t_0-\tau)}d\tau$$ 非奇异;

(3) $rank[\mathbf{B}\ \ \mathbf{A}\mathbf{B}\ \ \ldots\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]=n$

(4) 在复数域上，矩阵$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$的行是线性无关的;

(5) 对于$\mathbf{A}$ 的任一特征值 λ_i，都有 $rank[\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}\ \ \mathbf{B}]=n$

(6) 对于任一复数s，都有 $rank[\mathbf{A}-s\mathbf{I}\ \ \mathbf{B}]=n$

时不变系统的振型（模态）、模式

1. 振型（模态）与运动模式的定义

把**A**的特征值λ_i称为系统的**振型**或**模态**，把$e^{\mathbf{A}t}$中的

$$t^k e^{\lambda_i t}\text{（}k=0，1，2，\ldots，n_i，i=1，2，\ldots，m\text{）}$$

称为方程 $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}$ 与λ_i相对应的**运动模式**。

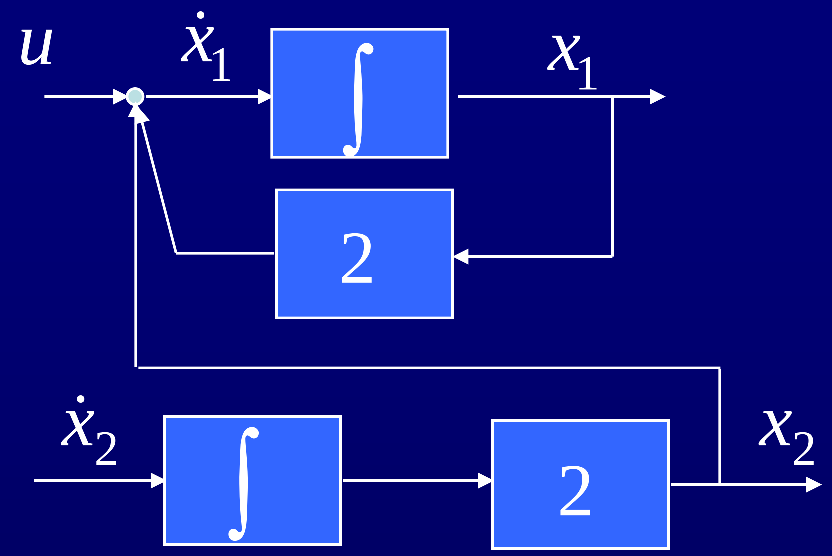
定义： 使矩阵$[\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}\ \ \mathbf{B}]$满秩的$\lambda_i$称为**可控模态**；使矩阵$[\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}\ \ \mathbf{B}]$降秩的$\lambda_i$称为**不可控模态**。

- 不可控制模态所对应的运动模式与控制作用无耦合关系，因此不可控模态又称为系统的**输入解耦零点**。
- 一个线性时不变系统可控的充分必要条件是没有输入解耦零点。

例： 考虑系统 $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

有重根2。利用PBH检验法:$[\mathbf{A}-2\mathbf{I}\ \mathbf{b}]$,有

$$[\mathbf{A}-2\mathbf{I}\ \mathbf{b}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$ 系统不可控。由结构图可知：



可见，在这两个重根中，有一个模态是不可控的，另一个模态是可控的。事实上

$$x_2(t) = e^{2t} x_2(0)$$

与该不可控的模态2相对应的运动模式是e^{2t}，它与控制无耦合关系。

2. 特征根(模态）的重数与可控性

- **当λ_0为简单特征值时：**

$rank\begin{bmatrix}\mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{I} & \mathbf{B}\end{bmatrix}<n$　　λ_0 不可控模态；

$rank\begin{bmatrix}\mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{I} & \mathbf{B}\end{bmatrix}=n$　　λ_0 可控模态。

- **当λ_0为重特征值时：**

当λ_0 是$\mathbf{A}$的**重特征值**时，若 $rank[\mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{I}\ \mathbf{B}]<n$，只能判断至少有一个$\lambda_0$不可控，并不能说所有的 λ_0 都不可控。

究竟有几个λ_0 是可控的，几个λ_0 是不可控的？

a) 计算可控性矩阵的秩

b) 进行**可控性分解**

例题:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}_1=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$rank\begin{bmatrix}\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I} & \mathbf{b}_i\end{bmatrix}=3,\ i=1,2,3。$$

但 $(\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}_1)$ 有一个模态不可控;

$(\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}_2)$ 有二个模态不可控;

$(\mathbf{A}\ \ \mathbf{b}_3)$ 有三个模态不可控;

计算矩阵 $[\mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{I}\ \ \mathbf{b}]$ 的秩区别不出这三种不同情况。**而可控性矩阵的秩却显示出这种差别：**

$$rank\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 & \mathbf{A}^3\mathbf{b}_1\end{bmatrix}=3$$ ，一个模态不可控；

$$rank\begin{bmatrix}\mathbf{b}_2 & \mathbf{A}\mathbf{b}_2 & \mathbf{A}^2\mathbf{b}_2 & \mathbf{A}^3\mathbf{b}_2\end{bmatrix}=2$$ ，二个模态不可控；

$$rank\begin{bmatrix}\mathbf{b}_3 & \mathbf{A}\mathbf{b}_3 & \mathbf{A}^2\mathbf{b}_3 & \mathbf{A}^3\mathbf{b}_3\end{bmatrix}=1$$ ，三个模态不可控；

对此例也可以直接用可控性分解来判断。

3. 可控性与运动模式

若线性时不变动态方程可控即没有输入解耦零点时，则输入能激励方程的所有运动模式。另一方面，输入也能抑制任何所不希望的运动模式。

例 2-9 考虑方程

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix}x$$

易见系统可控。**A** 有两个特征值−1和 2。方程有两个运动模式e^{-t}, e^{2t} 。希望找到控制 u 来抑制模式e^{2t} 。

计算$e^{\mathbf{A}t}$:

$$e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t} & \frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t}\\ \frac{2}{3}e^{2t}-\frac{2}{3}e^{-t} & \frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t}\end{bmatrix}$$

令 $u=0, \forall t \ge t_0$， 则当 $t \ge t_0$ 时，

$$y=[1 \quad 2]e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \end{bmatrix}$$

$$=\frac{5}{3}[x_1(t_0)+x_2(t_0)]e^{2t}+\frac{1}{3}[x_1(t_0)-2x_2(t_0)]e^{-t}$$

取 $x_1(t_0)=-x_2(t_0)$， 则当 $t > t_0$ 后， 输出将不再包含 e^{2t} 。由于系统可控，完全可以找到这样的容许控制 $u_{[0,t_0]}$，使得从 $x_1(0), x_2(0)$ 转移到满足条件的 $x_1(t_0), x_2(t_0)$ 。

简化的可控性条件

利用可控性矩阵来判断可控性时，无须完全计算出矩阵$[\mathbf{B},\mathbf{AB},\ldots,\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$，而只须计算一个列数较小的矩阵。记 $\mathbf{U}_{k-1}=[\mathbf{B}\ \ \mathbf{AB}\ \ldots\ \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{B}]$

定理2-7 若 j 是使$rank\,\mathbf{U}_j= rank\,\mathbf{U}_{j+1}$成立的最小整数，则对于所有$k>j$，有

$$rank\,\mathbf{U}_k=rank\,\mathbf{U}_j$$

并且 $$j\leqslant\min\{n-r,\bar{n}-1\}$$

其中 $rank\mathbf{B}=r$， 且$\bar{n}$ 是矩阵**A**的最小多项式的次数。

证明：

要证明1）对所有$k>j$，有$rank\mathbf{U}_k = rank\mathbf{U}_j$由于

$$rank\mathbf{U}_j = rank\mathbf{U}_{j+1}$$

$$\Leftrightarrow rank[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\cdots\mathbf{A}^j\mathbf{B}] = rank[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\cdots\mathbf{A}^j\mathbf{B}\ \ \mathbf{A}^{j+1}\mathbf{B}]$$

$\Rightarrow \mathbf{A}^{j+1}\mathbf{B}$的每一列可由矩阵$[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\cdots\mathbf{A}^j\mathbf{B}]$的各列线性表出, 即

$$\mathbf{A}^{j+1}\mathbf{B}=[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\cdots\mathbf{A}^j\mathbf{B}]\begin{bmatrix}\mathbf{F}_0\\ \mathbf{F}_1\\ \vdots\\ \mathbf{F}_j\end{bmatrix}$$

其中$\mathbf{F}_i$为$p\times p$的子阵。

现在考虑$\mathbf{A}^{j+2}\mathbf{B}=\mathbf{A}(\mathbf{A}^{j+1}\mathbf{B})$。显然，

$$\mathbf{A}^{j+2}\mathbf{B}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{j+1}\mathbf{B}=[\mathbf{AB}\ \ \mathbf{A}^2\mathbf{B}\cdots\mathbf{A}^{j+1}\mathbf{B}]\begin{bmatrix}\mathbf{F}_0\\ \mathbf{F}_1\\ \vdots\\ \mathbf{F}_j\end{bmatrix}$$

$$=[\mathbf{B}\ \ \mathbf{AB}\cdots\mathbf{A}^{j}\mathbf{B}]\underbrace{\begin{bmatrix}0 & & & \mathbf{F}_0\\ \mathbf{I}_p & 0 & & \mathbf{F}_1\\ & \vdots & & \vdots\\ & & \mathbf{I}_p & \mathbf{F}_j\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{F}_0\\ \mathbf{F}_1\\ \vdots\\ \mathbf{F}_j\end{bmatrix}}_{\mathbf{G}}$$

这说明$\mathbf{A}^{j+2}\mathbf{B}$的各列也可由$[\mathbf{B}\ \ \mathbf{AB}\cdots\mathbf{A}^{j}\mathbf{B}]$的个列线性表出。依次类推，就是所要证明的。

2）证明$j \le \min\{n-r, \bar{n}-1\}$，这里$\bar{n}$是$\mathbf{A}$的最小多项式的次数，$r$ 是$\mathbf{B}$的秩。

事实上，若$rank\mathbf{B}=r$且$rank[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}]>r$

$$\Rightarrow rank[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}] \ge r+1;$$

进而，若$rank[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}] > rank[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}]$

$$\Rightarrow rank[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A}^2\mathbf{B}] \ge r+2$$

$$\vdots$$

$$rank[\mathbf{B}\ \mathbf{AB} \cdots \mathbf{A}^j\mathbf{B}] \ge r+j$$

由于$rank\mathbf{U}$最多是n,故j最多取到$n-r$,即

$$j \le n-r;$$

另一方面，令$\psi(\lambda)$为$\mathbf{A}$的最小多项式：

$$\psi(\lambda)=\lambda^{\bar{n}}+\alpha_1\lambda^{\bar{n}-1}+\cdots\alpha_{\bar{n}}$$

根据最小多项式的性质，有

$$\psi(\mathbf{A})=\mathbf{A}^{\bar{n}}+\alpha_1\mathbf{A}^{\bar{n}-1}+\cdots+\alpha_{\bar{n}}\mathbf{I}=0$$

$\Rightarrow \mathbf{A}^{\bar{n}}\mathbf{B}$的各列可表示为$[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\cdots\mathbf{A}^{\bar{n}-1}\mathbf{B}]$中各列的线性组合。

与前面的分析类似，$\mathbf{A}^{\bar{n}+1}\mathbf{B},\mathbf{A}^{\bar{n}+2}\mathbf{B},\cdots$均可表示为

$$[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\cdots\mathbf{A}^{\bar{n}-1}\mathbf{B}]$$

各列的线性组合。因此，必有$j\le\bar{n}-1$。综上，

$$j\le\min\{n-r,\bar{n}-1\}$$

证完。

推论2－7：若$rank\mathbf{B}=r$,则$(\mathbf{A},\mathbf{B})$可控的充分必要条件是

$$rank\mathbf{U}_{n-r}=rank[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\cdots\mathbf{A}^{n-r}\mathbf{B}]=n$$

事实上，根据上面的分析可知，若

$$rank[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\cdots\mathbf{A}^{n-r}\mathbf{B}]<n$$

则系统就不可控了。

定义2-5：设系统可控。令使得$rank\,\mathbf{U}_j = rank\mathbf{U}_{j+1} = n$成立的最小整数 j 为(ν–1)，则称 ν 为方程

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

的可控性指数。对可控系统，由

$$j = \nu - 1 \leqslant \min\{n - r, \bar{n} - 1\}$$

$$\Rightarrow \nu \leqslant \min\{n - r, \bar{n} - 1\} + 1$$

线性系统的可观性

一、可观测性的定义

主要研究由输出估计状态的可能性。

定义2-6：若对状态空间中**任一非零初态**$x(t_0)$，存在一个有限时刻$t_1 > t_0$，使得由输入$u_{[t0,t1]}$和输出$y_{[t0,t1]}$能够唯一确定初始状态$x(t_0)$，则称动态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}, \quad t \in [t_0, +\infty) \quad (2-1)$$

在t_0时刻是可观测的。反之称为是t_0时刻不可观测的。

注：若存在一个$x(t_0)$，使得无论t_1取多么大，都不能够由$u_{[t_0,t_1]}$及$y_{[t_0,t_1]}$将$x(t_0)$唯一地确定出来，就说系统在t_0时刻是不可观测的。

问题：如何根据$u_{[t0,t1]}$和输出$y_{[t0,t1]}$ 确定$x(t_0)$？

例2-11：考虑如下二阶系统：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = cx = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

其状态转移阵为

$$\Phi(t-t_0) = \begin{bmatrix} 1 & t-t_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

方程的解为：

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & (t-t_0) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t} (t-\tau)u(\tau)d\tau \\ \int_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau \end{bmatrix}$$

显然，若知道控制u及初始条件$[x_{10}\ x_{20}]^T$,则系统的解就唯一地确定了。因此，假定u已知，我们的目的是要通过一段时间对y的观测，把$[x_{10}\ x_{20}]^T$确定出来。

注意到

$$y=cx=\underbrace{[1\quad 0]\begin{bmatrix}1 & (t-t_0)\\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{c\Phi(t,t_0)}\begin{bmatrix}x_{10}\\ x_{20}\end{bmatrix}+\int_{t_0}^{t}(t-\tau)u(\tau)d\tau$$

分析： 由于y是一维的，而$[x_{10}\ x_{20}]^T$却有两个未知数，故为了得到$[x_{10}\ x_{20}]^T$还要对y进行加权处理。为此，考虑

用$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (t-t_0) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Phi^*(t,t_0)c^*}$乘上式的两边，得

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (t-t_0) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Phi^*(t,t_0)c^*} y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (t-t_0) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Phi^*(t,t_0)c^*} \underbrace{[1 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & (t-t_0) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{c\Phi(t,t_0)} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

$$+\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ (t-t_0) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\Phi^*(t,t_0)c^*} \int_{t_0}^{t} (t-\tau) u(\tau) d\tau$$

对上式从t_0到t_1积分，即：

$$\int_{t_0}^{t_1} \Phi^*(t,t_0)c^*y(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \Phi^*(t,t_0)c^*c\Phi(t,t_0)dt \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix}$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \{\Phi^*(t,t_0)c^*\int_{t_0}^{t}(t-\tau)u(\tau)d\tau\}dt$$

经整理后得

$$h(t_0,t_1,y) = \begin{bmatrix} (t_1-t_0) & \frac{1}{2}(t_1-t_0)^2 \\ \frac{1}{2}(t_1-t_0)^2 & \frac{1}{3}(t_1-t_0)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + g(t_0,t_1,u)$$

已知

已知

由此可得：

$$\begin{bmatrix} (t_1 - t_0) & \frac{1}{2}(t_1 - t_0)^2 \\ \frac{1}{2}(t_1 - t_0)^2 & \frac{1}{3}(t_1 - t_0)^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \underbrace{h(t_0, t_1, y) - g(t_0, t_1, u)}_{\text{已知}}$$

不难验证，对任意的$t_1 > t_0$，

$$\det \begin{bmatrix} (t_1 - t_0) & \frac{1}{2}(t_1 - t_0)^2 \\ \frac{1}{2}(t_1 - t_0)^2 & \frac{1}{3}(t_1 - t_0)^3 \end{bmatrix} = \frac{1}{12}(t_1 - t_0)^4 \neq 0$$

故：

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t_1 - t_0) & \frac{1}{2}(t_1 - t_0)^2 \\ \frac{1}{2}(t_1 - t_0)^2 & \frac{1}{3}(t_1 - t_0)^3 \end{bmatrix}^{-1} [h(t_0, t_1, y) - g(t_0, t_1, u)]$$

这个例子说明，通过对系统输入和输出信息的测量，经过**一段时间的积累和加权处理**之后，我们可以唯一地确定出系统的初始状态，也就是说，输出对系统的初始状态有判断能力。初始状态一旦确定，则系统在任何时刻的状态就完全掌握了。

二、可观测性的一般判别准则

定理2-8：动态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}, \quad t \in [t_0, +\infty) \quad (2-1)$$

在t_0时刻可观测的充分必要条件是存在一个有限时刻$t_1 > t_0$，使得矩阵

$$\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0)$$

的 n 个列在$[t_0,\ t_1]$上线性无关。

证明：充分性：

1）研究

$$y(t)=\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)x(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)u(\tau)d\tau \quad (*)$$

分析(＊)式：q 个方程，n 个未知数，因此只利用 t_0 时刻的输出值无法唯一确定$x(t_0)$。

2). 利用 y 在［t_0, t_1］的值，通过加权处理， 即在(＊)式两边左乘：

$$[\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)]^* = \mathbf{\Phi}^*(t,t_0)\mathbf{C}^*(t)$$

经过整理后有：

$$\mathbf{\Phi}^*(t,t_0)\mathbf{C}^*(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)x(t_0)=\mathbf{\Phi}^*(t,t_0)\mathbf{C}^*(t)y_1(t)$$

$$y_1 := y(t)-\int_{t_0}^{t}\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)u(\tau)d\tau$$

3). 对上式两边由 t_0 到 t_1 积分，有

$$\mathbf{V}(t_0,t_1)x(t_0)=\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{\Phi}^*(\tau,t_0)\mathbf{C}^*(\tau)y_1(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{V}(t_0,t_1):=\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{\Phi}^*(\tau,t_0)\mathbf{C}^*(\tau)\mathbf{C}(\tau)\mathbf{\Phi}(\tau,t_0)d\tau$$

对照定理2-1，可知 $\mathbf{V}(t_0,\ t_1)$ 非奇异的充分必要条件是$\mathbf{C}(t)\ \Phi(t,\ t_0)$ 在$[t_0,\ t_1]$上**列线性无关。**

注：在讨论上述方程的可解性时，不妨令$u=0$，**即只讨论从零输入响应中求初态。**

必要性：反证法。设系统在t_0可观测，但对任意$t_1 > t_0$，

$\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)$列相关$\Rightarrow \exists \alpha \neq 0,$使得

$$\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)\alpha = 0,\ \ \forall t \in [t_0, t_1].$$

只要取 $x(t_0) = \alpha,$则

$$y(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)\alpha = 0 \forall t > t_0.$$

这说明$x(t_0)$不能由y确定出来。 **证完。**

推论2－8：动态方程(2-1)在t_0时刻可观测

$\Leftrightarrow$ 存在有限时刻$t_1 > t_0$,使矩阵$\mathbf{V}(t_0,t_1)$非奇异，

这里，

$$\mathbf{V}(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}^*(\tau,t_0)\mathbf{C}^*(\tau)\mathbf{C}(\tau)\mathbf{\Phi}(\tau,t_0)d\tau$$

类似于定理2-5，有

定理2-10 设状态方程$(\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t))$中的矩阵$\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{C}(t)$是$(n-1)$次连续可微的。若**存在有限**时间$t_1>t_0$,使得

$$rank\begin{bmatrix}\mathbf{N}_0(t_1)\\ \mathbf{N}_1(t_1)\\ \vdots\\ \mathbf{N}_{n-1}(t_1)\end{bmatrix}=n$$

这里,

$$\mathbf{N}_0(t)=\mathbf{C}(t)$$

$$\mathbf{N}_k(t)=\mathbf{N}_{k-1}(t)\mathbf{A}(t)+\frac{d\mathbf{N}_{k-1}(t)}{dt} \qquad k=1,2,\cdots,n-1$$

则系统在t_0时刻可观测。

三、可重构性

与可到达性概念相仿，可引入可重构的概念。

定义2-7：若对状态空间任一状态$x(t_0)$，存在某个有限时刻$t_1, t_1 < t_0$,使得由输入$u_{[t_1,t_0]}$和输出$y_{[t_1,t_0]}$的值可唯一地确定$x(t_0)$,则称系统$(2-1)$在t_0时刻是可重构的。

定义2-7与定义2-6在时间区间上有区别：可重构 是用$[t_1 , t_0]$过去的信息来判断$x(t_0)$；而可观测性则是用$[t_0 , t_1]$ 的信息来判断$x(t_0)$。

定理2−9： 系统

$$\dot{x} = \mathbf{A}(t)x + \mathbf{B}(t)u$$
$$y = \mathbf{C}(t)x + \mathbf{D}(t)u \qquad (2—1)$$

可重构的充分必要条件是存在有限的$t_1 < t_0$，使得矩阵$\mathbf{C}(\tau)\Phi(\tau, t_0)$在$[t_1, t_0]$上列线性无关，或等价地，

$$\int_{t_1}^{t_0} \mathbf{\Phi}^*(\tau, t_0)\mathbf{C}^*(\tau)\mathbf{C}(\tau)\mathbf{\Phi}(\tau, t_0)d\tau$$ 非奇异。

事实上，由

$$x(t_0)=\mathbf{\Phi}(t_0,\tau)x(\tau)$$

可得到

$$x(\tau)=\mathbf{\Phi}(\tau,t_0)x(t_0) \Rightarrow y(\tau)=\mathbf{C}(\tau)\mathbf{\Phi}(\tau,t_0)x(t_0)$$

$$\mathbf{\Phi}^*(\tau,t_0)\mathbf{C}^*(\tau)y(\tau)=\mathbf{\Phi}^*(\tau,t_0)\mathbf{C}^*(\tau)\mathbf{C}(\tau)\mathbf{\Phi}(\tau,t_0)x(t_0)$$

积分就可得到

$$\int_{t_1}^{t_0} \mathbf{\Phi}^*(\tau,t_0)\mathbf{C}^*(\tau)\mathbf{C}(\tau)\mathbf{\Phi}(\tau,t_0)d\tau \text{ 非奇异。}$$

四、线性系统的对偶性

对动态方程$(2-1)$:

$$\begin{cases}\dot{x}=\mathbf{A}(t)x+\mathbf{B}(t)\mathbf{u}\\ y=\mathbf{C}(t)x+\mathbf{D}(t)\mathbf{u}\end{cases}\qquad \textbf{(I)}$$

定义其对偶系统为:

$$\begin{cases}\dot{z}=-\mathbf{A}^{*}(t)z+\mathbf{C}^{*}(t)v\\ \gamma=\mathbf{B}^{*}(t)z+\mathbf{D}^{*}(t)v\end{cases}\qquad \textbf{(II)}$$

定理2-19（对偶定理）：

1) 系统$(\mathbf{I})$在t_0时刻可控（可达）

$\Leftrightarrow$ 系统$(\mathbf{II})$在t_0时刻可观测（可重构）；

2) 系统(**I**)在t_0时刻可观测（可重构）

$\Leftrightarrow$ 系统(**II**)在t_0时刻可控（可达）。

证明: 1）令$\Phi(t_0,\tau)$为(**I**)的状态转移矩阵，则可验证，

$$\Phi^{*-1}(\tau,t_0)=\Phi^{*}(t_0,\tau)$$

为(**II**)的状态转移阵(见习题1-19))。故

(**I**) t_0可控 $\Leftrightarrow \exists t_1 > t_0, \Phi(t_0,\tau)\mathbf{B}(\tau)$在$[t_0,t_1]$行无关

$\Leftrightarrow (\Phi(t_0,\tau)\mathbf{B}(\tau))^* = \mathbf{B}^*(\tau)\Phi^*(t_0,\tau) = \mathbf{B}^*(\tau)\Phi^{*-1}(\tau,t_0)$ 列无关

$\Leftrightarrow$ (**II**)t_0可观（已知$\Phi^{*-1}(\tau,t_0)$为(**II**)的转移矩阵）。

同理可证2)。

线性时不变系统的可观测性判据

1.可观测性判据

定理2-11： 对于n维线性不变状态方程

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}x + \mathbf{D}u\end{aligned} \qquad （2\text{-}21）$$

下列提法等价:

(1) 在[0，+∞)中的每一个 t_0,（2-21）可观测;

(2) $\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}$的各在[0 +∞)上是复数域线列线性无关。

(3)对于任何$t_0 \geqslant 0$ 及任何 $t > t_0$，矩阵$\mathbf{V}(t_0,t)$非奇异:

$$\mathbf{V}(t_0,t) = \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}^*(\tau-t_0)}\mathbf{C}^*\mathbf{C}\, e^{\mathbf{A}(\tau-t_0)} d\tau$$

(4) 可观测性矩阵

$$rank\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\\ \vdots\\ \mathbf{CA}^{n-1}\end{bmatrix}=n$$

(5) 在复数域上，矩阵$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$的列是线性无关的；

(6) 对于$\mathbf{A}$ 的任一特征值 λ_i，都有(**可观测性PBH检验**)

$$rank\begin{bmatrix}\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}\\ \mathbf{C}\end{bmatrix}=n \qquad (2-15)$$

2. 可观测的模态(振型)及相应的运动模式

使得

$$rank\begin{bmatrix} \mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} = n \qquad (2-15)$$

的λ_i 称为**可观测模态**，与之相应，e^{At} 中形如

$$t^k e^{\lambda_i t}, k=0,1,\cdots; \quad i=1,2,\cdots,s$$

的项称为**可观测的运动模式**。

反之，若(2—15)降秩，则称λ_i 称为**不可观测模态**，相应的模式称为**不可观测的模式**。

若定理2-11,PBH条件不满足，即存在

$$\lambda_0 \in \mathbf{A}(\sigma), rank\begin{bmatrix} \mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix} < n,$$

$\Rightarrow \exists \alpha \neq 0$，使得

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}-\lambda_0\mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}\alpha = 0$$

$\Rightarrow \mathbf{A}\alpha = \lambda_0\alpha$ 及 $\mathbf{C}\alpha = 0$

这说明α 是**A**的属于特征值λ_0的特征向量，它在**C**的核空间中，λ_0 是不可观的模态。**它对应的特征向量落在C 的核中，输出 y 不反映λ_0（单根）对应的运动模式。**

例题2-13

$$\dot{x}=\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}}x \quad y=\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{c}x$$

$$\lambda=-1 \qquad rank\begin{bmatrix}\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\\ c\end{bmatrix}_{\lambda=-1}=2 \qquad \alpha_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\lambda=-2 \qquad rank\begin{bmatrix}\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}\\ c\end{bmatrix}_{\lambda=-2}=1 \qquad \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

因此$\lambda=-2$是一个不可观测的模态。为了说明与其对应的模式不会出现在输出中，考虑其解：

$$y(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ e^{-t}-e^{-2t} & e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix}$$

所以

$$y = e^{-t}x_1(0), \quad t \geq 0$$

以上结果说明α_2属于c的核空间，即满足$c\alpha_2 = 0$。

故在输出中不反映振型λ=−2所对应的运动模式e^{-2t}。

思考题：能否一般地证明，系统所有不可观测模态所对应的模式均不会出现在输出中？

类似地，有**可观测性指数**的概念。

若当型动态方程的可控性和可观测性

一、等价变换的性质

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$$

令 $\overline{x} = \mathbf{P}x, \det(\mathbf{P}) \neq 0$，则经等价变换后有

$$\dot{\overline{x}} = \overline{\mathbf{A}}\overline{x} + \overline{\mathbf{B}}u$$
$$y = \overline{\mathbf{C}}\overline{x} + \overline{\mathbf{D}}u$$

其中：

$$\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}, \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{PB}, \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{CP}^{-1}, \overline{\mathbf{D}} = \mathbf{D}$$

定理2-13：在任何等价变换之下，线性时不变系统的可控性和可观测性不变。

注：定理2-13可以推广到线性时变系统。

证**明：**等价系统的可控性矩阵、可观性矩阵满足

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{x} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}$$

$$y = \bar{\mathbf{C}}\bar{x} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u}$$

$$[\bar{\mathbf{B}}\ \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}^{(n-1)}\bar{\mathbf{B}}] = \mathbf{P}[\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{B}]$$

$$[\bar{\mathbf{C}}^T\ \ \bar{\mathbf{A}}^T\bar{\mathbf{C}}^T\ \ \cdots\bar{\mathbf{A}}^{T(n-1)}\bar{\mathbf{C}}^T]^T = [\mathbf{C}^T\ \ \mathbf{A}^T\mathbf{C}^T\cdots\mathbf{A}^{T(n-1)}\mathbf{C}^T]^T\mathbf{P}^{-1}$$

证完。

二、若当动态方程的可控性和可观测性判据

典型的若当矩阵：

$$\left[\begin{array}{cc|cc|cc} 2 & 1 & & & & \\ & 2 & & & & \\ \hline & & 2 & 1 & & \\ & & & 2 & & \\ \hline & & & & -3 & 1 \\ & & & & & -3 \end{array}\right]$$

尽管有相同的特征值，但它们却属于不同的若当块。

例： 讨论如下系统的可控性和可观测性：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \\ & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ \hline 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ \hline 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{array}\right] \end{array}\begin{array}{l} \\ \leftarrow \mathbf{b}_{L11} \\ \\ \leftarrow \mathbf{b}_{L12} \\ \\ \leftarrow \mathbf{b}_{L21} \end{array}$$

$$C=\left[\begin{array}{cc:cc:cc} 1 & 1 & 0 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

利用PBH检验：$rank[\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}\ \mathbf{B}]$ 或$rank\begin{bmatrix}\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}\\ \mathbf{C}\end{bmatrix}$

$$\lambda_1=2,\lambda_2=-3$$

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 5 & 1 & & & & \\ & 5 & & & & \\ \hdashline & & 5 & 1 & & \\ & & & 5 & & \\ \hdashline & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ \hdashline 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ \hdashline 4 & 5 \\ 1 & 0 \end{array}\right]$$

$\mathbf{c}_{111}$ $\mathbf{c}_{112}$ $\mathbf{c}_{121}$

$$C = \left[\begin{array}{cc:cc:cc} 1 & 1 & 0 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]$$

利用PBH检验：$rank[\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}\ \mathbf{B}]$ 或$rank\begin{bmatrix}\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I} \\ \mathbf{C}\end{bmatrix}$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$$

$\mathbf{A}$有m个相异的特征根，与每一特征根λ_i相应的若当块共有r_i个。这里，$\mathbf{A}_{ij}$是属于$\mathbf{A}_i$的第j个若当块。

$$\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{l_j \times l_j} \qquad \mathbf{B}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1ij} \\ \mathbf{b}_{2ij} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{\mathbf{L}ij} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{i1} & & & \\ & \mathbf{A}_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_{ir_i} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{i1} \\ \mathbf{B}_{i2} \\ \vdots \\ \mathbf{B}_{ir_i} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_i = [\mathbf{C}_{i1} \quad \mathbf{C}_{i2} \quad \cdots \quad \mathbf{C}_{ir_i}],\ i = 1, 2, \cdots, m$$

$$
\mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & & & \\ & \lambda_i & 1 & & \\ & & \lambda_i & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \lambda_i \end{bmatrix}_{l_j \times l_j} \qquad \mathbf{B}_{ij} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{1ij} \\ \mathbf{b}_{2ij} \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{\mathbf{L}ij} \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{C}_{ij} = [\mathbf{c}_{1ij} \quad \mathbf{c}_{2ij} \quad \cdots \quad \mathbf{c}_{Lij}],\ i = 1, 2, \cdots, m;\ j = 1, 2, \cdots, r_i
$$

定 理2-14 (可控、可观性判据)

- 若当型动态系统(2-26)可控的充分必要条件为下列矩阵行线性无关

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{Li1} \\ \mathbf{b}_{Li2} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{Lir_i} \end{bmatrix} \qquad i=1,2,\cdots,m$$

- 若当型动态系统(2-26)可观测的充分必要条件为下列矩阵列线性无关：

$$\mathbf{C}_i^1=[\mathbf{c}_{1i1} \ \ \mathbf{c}_{1i2}\cdots\mathbf{c}_{1ir_i}], \quad i=1,2,\cdots m$$

例题2-14

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \\ & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}_{7\times 7} \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

考察系统的可控性和可观测性。

将 $\lambda_1 = \mathbf{1}$ 代入 $rank\begin{bmatrix}\mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I} & \mathbf{B}\end{bmatrix}$ 后可得

$$
A=\begin{bmatrix}
0 & 1 & & & & & \\
 & 0 & & & & & \\
 & & 0 & & & & \\
 & & & 0 & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & & & & & 1
\end{bmatrix}
\qquad
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \\ \\ \\ \\
\end{array}
B=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1\\
1 & 1 & 2\\
0 & 3 & 1\\
0 & 0 & 2
\end{bmatrix}
\begin{array}{l}
\\
\mathbf{b}_{L11}\\
\mathbf{b}_{L12}\\
\mathbf{b}_{L13}\\
\\
\\
\\
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}\mathbf{b}_{L11}\\ \mathbf{b}_{L12}\\ \mathbf{b}_{L13}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}
$$

行线性无关

将$\lambda_2 = 2$代入$rank\left[\mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I}\quad \mathbf{B}\right]$后可得

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & & & & & \\ & -1 & & & & & \\ & & -1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{cc} B=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \mathbf{b}_{L21} \\ \mathbf{b}_{L22} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{L21} \\ \mathbf{b}_{L22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$ 行线性无关

按照上述记号，可知**A**有二个不同的特征值{1,2}，特征值1对应有三个若当块，特征值2对应有两个若当块，判别可控性的行向量为

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_{L11} \\ \mathbf{b}_{L12} \\ \mathbf{b}_{L13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{L21} \\ \mathbf{b}_{L22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

每组的行向量线性无关，满足判据的要求，故系统可控。

再来考察这个系统的可观测性。

$$
\mathbf{A}=\begin{bmatrix}
1 & 1 & & & & & \\
 & 1 & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & & & 2 & 1 & \\
 & & & & & 2 & \\
 & & & & & & 2
\end{bmatrix}_{7\times 7}
$$

$$
\mathbf{C}=\begin{bmatrix}
1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 2
\end{bmatrix}
$$

将 $\lambda_1 = 1$ 代入 $rank\begin{bmatrix} \mathbf{A}-\lambda_1\mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$ 后可得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}_{7\times7}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{c}_{111}$ $\mathbf{c}_{112}$ $\mathbf{c}_{113}$

子矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

列线性无关

将 $\lambda_2 = 2$ 代入 $rank\begin{bmatrix} \mathbf{A}-\lambda_2\mathbf{I} \\ \mathbf{C} \end{bmatrix}$ 后可得

$$
\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
-1 & 1 & & & & & \\
 & -1 & & & & & \\
 & & -1 & & & & \\
 & & & -1 & & & \\
 & & & & 0 & 1 & \\
 & & & & & 0 & \\
 & & & & & & 0
\end{bmatrix}_{7\times 7}
$$

$$
\mathbf{C} = \begin{bmatrix}
1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 2 & 2
\end{bmatrix}
$$

$\mathbf{c}_{121}$

由于 $\mathbf{c}_{121}=0$ 该系统不可观测。

推论2-14：

（1） 若当型动态方程 **(A, b)** 可控的充分必要条件是**对应于一个特征值只有一个若当块**，且向量**b** 中所有与若当块最后一行相对应的元素不为零；

（2） 若当型动态方程 **(A, c)** 可观测的充分必要条件是**对应于一个特征值只有一个若当块**，且向量**c**中所有与若当块第一列相对应的元素不为零。

例： 考虑单输入系统：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0 & 0\\ & 2 & 0 & 0\\ & & 3 & 1\\ & & & 3\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}$$

利用PBH检验法，可知这个系统是可控的。

例2—15 设有若当型状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

虽然**A**阵具有若当型且对所有的t，$\mathbf{b}(t)$的各分量非零，但并不能应用推论2—14来判断可控性。

事实上，对任一固定的t_0有

$$\Phi(t_0-t)\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} e^{-(t_0-t)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t_0-t)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t_0} \\ e^{-2t_0} \end{bmatrix}$$

显然对所有$t>t_0$，矩阵 $\Phi(t_0-t)\mathbf{B}(t)$ 的各行线性相关，故方程在任何t_0均不可控。

作业：

P75: 2-2 a, d; 2-3 ； 2-7； 2-8； 2.11;2-14