第六讲

可控性、可观测性几何判别

例2—15 设有若当型状态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}\mathbf{u}$$

虽然**A**阵具有若当型且对所有的t，$\mathbf{b}(t)$的各分量非零，但并不能应用推论2—14来判断可控性。

事实上，对任一固定的t_0有

$$\Phi(t_0 - t)\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} e^{-(t_0-t)} & 0 \\ 0 & e^{-2(t_0-t)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t_0} \\ e^{-2t_0} \end{bmatrix}$$

显然对所有$t > t_0$，矩阵 $\Phi(t_0 - t)\mathbf{B}(t)$ 的各行线性相关，故方程在任何t_0均不可控。

关于值域、核与正交补

一个 $m\times n$矩阵 **A**可看作 n 维线性空间**X**到m维线性空间**Y**的映射

X n 维线性空间 定义域

Y m 维线性空间 值域

若**A**是 $n\times n$ 矩阵，可以看作 n 维空间到自身的线性变换, **A**是这一线性变换的矩阵表示。

1. 核空间： Ker**A**={x | x∈X, **A**x=0}，这里， Ker**A**是**A**的不变子空间，即有

$$\forall x \in \mathrm{Ker}\mathbf{A} \qquad \mathbf{A}x \in \mathrm{Ker}\mathbf{A}$$

2. 值域： $\mathrm{Im}\mathbf{A}=\{y \mid y \in Y \quad 存在x\in X，\ \mathbf{A}x=y\}$

$$\dim \mathrm{Im}\mathbf{A}=rank\ \mathbf{A}$$

ImA是**A**的列向量所张成的空间。可以表示为

$$\mathrm{Im}\mathbf{A}=\mathrm{span}\ \{a_1\ a_2,\ \ldots,\ a_n\}$$

ImA中的任一向量可以表成**A**的列向量的线性组合。

$$\dim \mathrm{Ker}\mathbf{A}+\dim \mathrm{Im}\mathbf{A}=n$$

3. 正交补： $(\mathrm{Im}\mathbf{A})^{\perp}=\{y \mid y \in Y,\ y^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=0\}$

4. $$(\mathrm{Im}\,\mathbf{A})^{\perp}=\mathrm{Ker}\mathbf{A}^{T}$$

5. A是对称阵时有 $(\mathrm{Im}\,\mathrm{A})^{\perp}=\mathrm{Ker}\mathrm{A}=\mathrm{Ker}\mathrm{A}^{T}$

$$\mathbf{X}=\mathrm{Im}\,\mathbf{A}\oplus(\mathrm{Im}\,\mathbf{A})^{\perp}=\mathrm{Im}\,\mathbf{A}\oplus\mathrm{Ker}\mathbf{A}$$

思考题

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$$

求Ker**A**、Im**A** , $(\mathrm{Im}\,\mathbf{A})^{\perp}$ 并验证4,5,所表示的关系。

LTI系统可控性和可观测性的几何判别

对 n 维**线性时不变（LTI）**动态方程为

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u$$

一、可控状态与可控子空间

定义2—9 对于LTI系统，如果取定的初始状态 $x(t_0)=x_0$，存在某个有限时刻 $t_1 > t_0$ 和一个容许控制 $\mathbf{u}_{[t_0,t_1]}$ 使得系统在这个控制作用下，从 x_0 出发的轨线在时刻 t_1 到达零状态: $x(t_1)=0$，则**称 x_0 是系统的一个可控状态**。

讨论：

不难验证，所有可控状态的全体组成一个线性空间。事实上，若x_1、x_2是系统的可控状态，则

$$\alpha x_1 + \beta x_2$$

对所有实数 α 及 β 仍然是可控状态。**注意，零状态是可控的**。因此，所有可控状态的全体构成一个线性空间。

二、可控子空间的结构

1. 空间$<\mathrm{A} \mid \mathrm{B}>$

讨论线性时不变系统的可控子空间结构。

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

$$y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u \qquad （2－31）$$

令 $\overline{\mathbb{B}} = \operatorname{Im}\mathbf{B}$ 表示**B**的值域空间，它由矩阵**B**的列向量所张成的空间，且是状态空间**X**的子空间。引入记号

$$<\mathbf{A} \mid \mathbf{B}> = \overline{\mathbb{B}} + \mathbf{A}\overline{\mathbb{B}} + \mathbf{A}^2\overline{\mathbb{B}} + \cdots + \mathbf{A}^{n-1}\overline{\mathbb{B}} \qquad (2-32)$$

由于 $\overline{\mathbb{B}}, \mathbf{A}\overline{\mathbb{B}}, \cdots,$ $\mathbf{A}^{n-1}\overline{\mathbb{B}}$ 均为**X**的子空间，故$<\mathbf{A} \mid \mathbf{B}>$也是**X**的子空间，而且是**A**的不变子空间。

讨论：

1). $\overline{\mathbb{B}}$是**B**的值域空间，不是矩阵。

事实上，$\mathrm{Im}(\mathbf{A}^i\mathbf{B})=\mathbf{A}^i\,\mathrm{Im}\,\mathbf{B}=\mathbf{A}^i\overline{\mathbb{B}}$。

令$\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_p]\Rightarrow\mathbf{A}^i\mathbf{B}=[\mathbf{A}^i\mathbf{b}_1,\mathbf{A}^i\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{A}^i\mathbf{b}_p]$

$$\forall x\in\mathrm{Im}\,\mathbf{A}^i\mathbf{B}\Leftrightarrow x=[\mathbf{A}^i\mathbf{b}_1,\mathbf{A}^i\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{A}^i\mathbf{b}_p]\alpha$$

$$=\mathbf{A}^i[\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\cdots,\mathbf{b}_p]\alpha\Leftrightarrow x\in\mathbf{A}^i\,\mathrm{Im}\,\mathbf{B}=\mathbf{A}^i\overline{\mathbb{B}}$$

2). $<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>$的一个等价定义是：

$$<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>=\mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\cdots\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

事实上，任意$x \in \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{AB} \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$

$$\Leftrightarrow x = [\mathbf{B}\ \mathbf{AB} \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_i \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}}_{z}$$

p个元素

$$= \underbrace{\mathbf{B} z_1}_{x_1} + \underbrace{\mathbf{AB} z_2}_{x_2} + \cdots + \underbrace{\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} z_n}_{x_n} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

于是，$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$，且$x_i \in \mathbf{A}^{i-1}\overline{\mathbb{B}}$。即：

$$\mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{AB} \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \subset < \mathbf{A} \mid \mathbf{B} >$$

类似地，可证：$< \mathbf{A} \mid \mathbf{B} > \subset \mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{AB} \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$。

3). $< \mathbf{A} \mid \mathbf{B} >$是$\mathbf{A}$的一个不变子空间

2. 空间<A | B>的性质

引理1 $<\mathbf{A}|\mathbf{B}> = \operatorname{Im}\mathbf{W}(t_0,t_1) \qquad \forall t_1 > t_0$ （2—33）

证明： 为了证明（2—33）式，只需证明

$$<\mathbf{A}|\mathbf{B}>^{\perp} = \ker\mathbf{W}(t_0,t_1)$$

因为$Gram$ 矩阵$\mathbf{W}(t_0,t_1)$是 $n\times n$ 对称矩阵，故

$$[\operatorname{Im}\mathbf{W}(t_0,t_1)]^{\perp} = \ker\mathbf{W}^{\mathrm{T}}(t_0,t_1) = \ker\mathbf{W}(t_0,t_1)$$

因为 $\mathbf{X} = <\mathbf{A}|\mathbf{B}> \oplus <\mathbf{A}|\mathbf{B}>^{\perp} = \operatorname{Im}\mathbf{W}(t_0,t_1) \oplus [\operatorname{Im}\mathbf{W}(t_0,t_1)]^{\perp}$

因而若证明了

$$<\mathbf{A}|\mathbf{B}>^{\perp} = \ker\mathbf{W}(t_0,t_1)$$

也就证明了(2−33)式。

1). 先证明$\ker \mathbf{W}(t_0,t_1) \subset <\mathbf{A}|\mathbf{B}>^{\perp}$；取

$$x \in \ker \mathbf{W}(t_0,t_1) \Rightarrow \mathbf{W}(t_0,t_1)x = 0 \Rightarrow x^T \mathbf{W}(t_0,t_1)x = 0$$

$$\Rightarrow x^T \int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_0-\tau)} d\tau x == \int_{t_0}^{t_1} \left\| (x^T e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B})^T \right\|^2 d\tau = 0$$

$$\Rightarrow x^T e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B} = 0, \forall \tau \in [t_0,t_1]$$ 两边求导数，有

$$(-1)^j x^T \mathbf{A}^j e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B} = 0, j = 0,1,2,\cdots,n-1$$

令$\tau = t_0$ $\quad \Leftrightarrow x^T \mathbf{A}^j \mathbf{B} = 0, j = 0,1,2,\cdots,n-1$

$$\Rightarrow x^T [\mathbf{B}\ \mathbf{A}\mathbf{B} \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = 0$$

$$\Rightarrow x \in <\mathbf{A}|\mathbf{B}>^{\perp} \Rightarrow \ker \mathbf{W}(t_0,t_1) \subset <\mathbf{A}|\mathbf{B}>^{\perp} \qquad (1)$$

2). 证明$\mathrm{Ker}\mathbf{W}(t_0,t_1) \supset <\mathbf{A}|\mathbf{B}>^{\perp}$

因$x \in <\mathbf{A}|\mathbf{B}>^{\perp} \Rightarrow x^T[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\cdots\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]=0$

$$\Rightarrow \mathbf{B}^T x = \mathbf{B}^T(\mathbf{A}^T x) = \cdots = \mathbf{B}^T((\mathbf{A}^T)^{n-1}x) = 0$$

$\Rightarrow (\mathbf{A}^T)^j x$属于$\mathbf{B}^T$的核空间

$\Rightarrow$ 对于任意$\tau \in [t_0,t_1]$, $\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_0-\tau)}x = 0 \quad (1-48)$

$\Rightarrow e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_0-\tau)}x = 0$。

积分，有$\left(\int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_0-\tau)}d\tau\right)x = \mathbf{W}(t_0,t_1)x = 0$

$\Rightarrow <\mathbf{A}|\mathbf{B}>^{\perp} \subset \ker \mathbf{W}(t_0,t_1) \qquad (2)$

由(1)、(2)，我们有$<\mathbf{A}|\mathbf{B}>^{\perp} = \ker \mathbf{W}(t_0,t_1)$,

因而$<\mathbf{A}|\mathbf{B}> = \mathrm{Im}\,\mathbf{W}(t_0,t_1)$。 证完。

引理2 $<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>$ 是可控子空间。

证明：1）证明这个空间中的每个状态都是可控状态

首先，0是可控状态。进而，令$x_0(\neq 0)\in<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>$

$$\Rightarrow x_0 \in \operatorname{Im}\mathbf{W}(t_0,t_1)$$

$$\Rightarrow \exists z_0 \neq 0, \text{使得 } x_0 = \mathbf{W}(t_0,t_1)z_0$$

令 $u(\tau) = -\mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T(t_0-\tau)}z_0$，则对$t_1 > t_0$，有

$$x(t_1) = e^{\mathbf{A}(t_1-t_0)}[x_0 + \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau}_{-\mathbf{W}(t_0,t_1)z_0=-x_0}] = 0$$

$\Rightarrow x_0$是可控状态。

2）证明凡可控状态均在$<\mathbf{A}|\mathbf{B}>$中

若x_0是一个可控状态$\Rightarrow\exists$有限的$t_1>t_0$和$u_{[t_0,t_1]}$,

$$x(t_1)=e^{\mathbf{A}(t_1-t_0)}[x_0+\int_{t_0}^{t_1}e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau]=0$$

$$\Rightarrow x_0=-\int_{t_0}^{t_1}e^{\mathbf{A}(t_0-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow x_0=-\sum_{k=0}^{n-1}\mathbf{A}^k\mathbf{B}\int_{t_0}^{t_1}p_k(t_0-\tau)u(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow x_0 = -[\mathbf{B}\ \mathbf{AB} \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \begin{bmatrix} \int_{t_0}^{t_1} p_0(t_0-\tau)u(\tau)d\tau \\ \int_{t_0}^{t_1} p_1(t_0-\tau)u(\tau)d\tau \\ \vdots \\ \int_{t_0}^{t_1} p_{n-1}(t_0-\tau)u(\tau)d\tau \end{bmatrix}$$

注意到对给定的t_0和t_1, $\int_{t_0}^{t_1} p_i(t_0-\tau)u(\tau)d\tau$是常向量，故

$x_0 \in < \mathbf{A} \,|\, \mathbf{B} >$。

证完。

定理2—15 线性时不变系统（2—31）可控的充分必要条件是

$$<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>=\mathbf{X}$$

关于可控子空间的正交补空间$<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>^{\perp}$，其中的元除了原点一定不可控，故其包含于**不可控子空间**。

注意：如下关于$<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>^{\perp}$的概念是错误的：

- 在这个子空间中的每一状态都是不可控状态。

  因为$0\in<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>^{\perp}$，但它却是一个可控状态。

- 凡是不可控状态均在这个子空间中。

这可以从如下例子看出：

例2—16 考虑动态方程

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

因为可控性矩阵

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, rank\mathrm{U}=1$$

$$\mathrm{Im}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \oplus \mathrm{Im}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= < \mathbf{A} | \mathbf{B} > \oplus < \mathbf{A} | \mathbf{B} >^{\perp} = \mathbf{R}^2$$

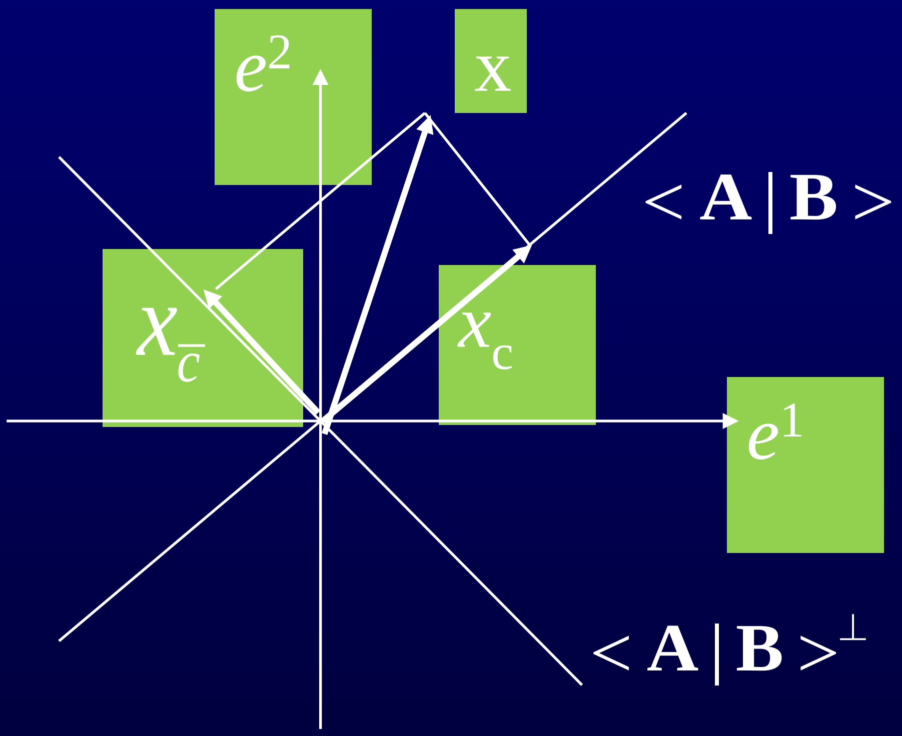


图2—3

因此，它的可控子空间是由向量**b**=[1 1]^{T}所张成的一维子空间。不可控子空间由向量[–1 1]^{T}所张成。这两个子空间的正交和构成了二维状态空间。状态空间中的任一状态向量可对这两个子空间进行分解，而且分解是唯一的，参看图2－3。分解的两个分量分别为

$$\begin{bmatrix} x_c \\ 0 \end{bmatrix} \quad 及 \quad \begin{bmatrix} 0 \\ x_{\bar{c}} \end{bmatrix}$$

显然，存在这样的状态，它既不属于$<\mathbf{A}|\mathbf{B}>$也不属于$<\mathbf{A}|\mathbf{B}>^{\perp}$。

三、不可观测状态与不可观测子空间

1.不可观测子空间的定义

定义2－10 若在t_0时刻，初态$\boldsymbol{x}(t_0)$引起的零输入响应为零，即当$\forall t \geq t_0$，$u(t)=0$时有$y(t)=0$，则称这个状态为t_0**时刻的不可观测状态**。

注1： 不可观测状态：$y(t)=\mathbf{C}\,e^{\mathbf{A}(t-t_0)}x_0=0$，$\forall t \geq t_0$

注2： $\boldsymbol{x}(t_0)=0$是一个不可观测状态。若系统在 t_0时刻是可观测的，则只有$\boldsymbol{x}(t_0)=0$是唯一的不可观测状态。

容易看出，所有不可观测状态的全体构成一个线性空间，它是状态空间的一个子空间，称为**不可观测子空间**。

（只要验证

$$y(t)=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}(\alpha x_{10}+\beta x_{20})=0,\forall t\geq t_0$$

即可）。

2. LTI系统不可观测子空间的结构

定义子空间

$$\eta = \bigcap_{k=0}^{n-1} \ker(\mathbf{C}\mathbf{A}^k) = \left\{ \; x : \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} x = 0 \; \right\}$$

不难验证，η 也是**A**的不变子空间。事实上，任取

$$x \in \eta \Rightarrow \mathbf{C}x = \mathbf{C}\mathbf{A}x = \cdots \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}x = 0$$

同时，为了证明$\mathbf{A}x \in \eta$,只要注意到

$$\mathbf{C}\mathbf{A}^n x = \mathbf{C}(\alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{A} + \cdots + \mathbf{A}^{n-1})x = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}x \in \eta$$

引理3： $\boldsymbol{\eta}$ 是LTI系统（2－31）的不可观测子空间，即 $\boldsymbol{\eta}$ 中的状态是系统的不可观测状态，而系统的不可观测状态均在 $\boldsymbol{\eta}$ 中。

证明： 任取$x_0 \in \eta$

$$\Rightarrow y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}x_0 = \sum_{k=0}^{n-1} p_k(t-t_0)\mathbf{C}\mathbf{A}^k x_0 = 0 \forall t \geq t_0$$

$\Rightarrow x_0$是不可观测状态。

反之，若x_0是不可观测状态，

$$y(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-t_0)}x_0 = 0, \quad \forall t \geq t_0$$

对上式求导，再令$t = t_0$,有$\mathbf{C}\mathbf{A}^k x_0 = 0 \Rightarrow x_0 \in \eta$ **证完。**

定理2－16 LTI系统(2－31)可观测的充分必要条件是

$$\eta = \{0\}$$

它说明系统可观测时，它只有唯一的零状态是不可观测状态。

当系统不可观测时，η 中将包含有非零元。我们定义 $\boldsymbol{\eta}$ 的正交补空间包含于 系统（2－31）的可观测子空间，记为 $\eta^{\perp}$ 。

例2—17 考虑例2—16中的动态方程：

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}\mathbf{u},\quad \mathbf{y}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\mathbf{x}$$

其可观测性矩阵

$$V=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{CA}\end{bmatrix}$$

V的秩为1，不可观测子空间 $\eta=\ker\mathbf{C}\cap\ker\mathbf{CA}$

为向量$[-1\ \ 1]^T$所张成的子空间；其正交补空间 $\eta^{\perp}$

为向量 $[1\ \ 1]^T$所张成的子空间，参见图2—4。

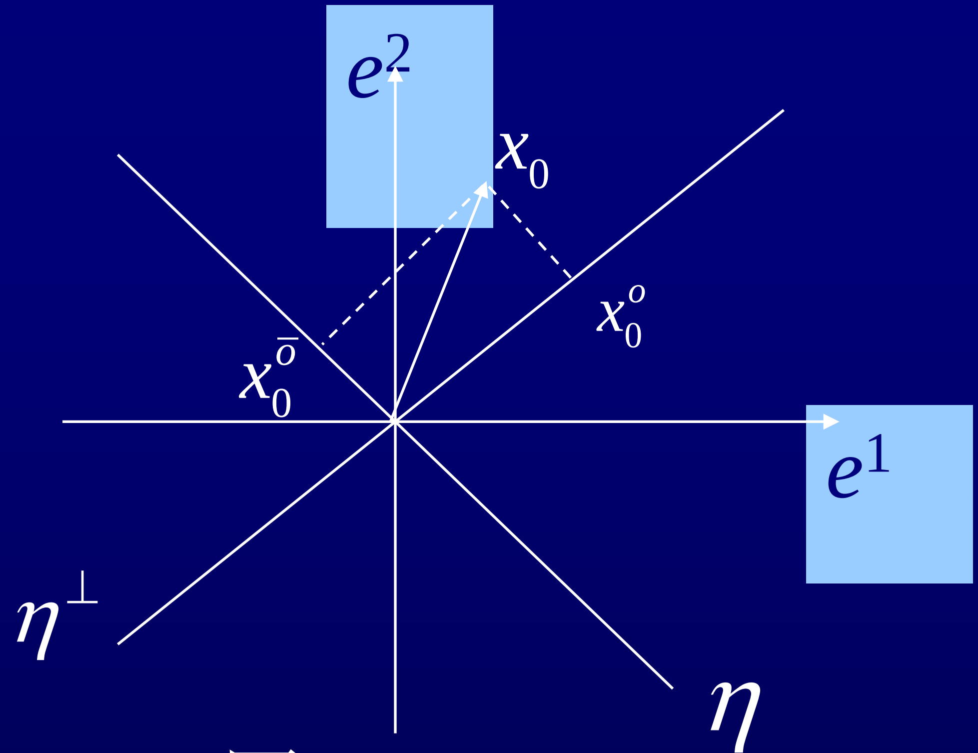


图2—4

显然，状态x_0可分解成两个状态：

$x_0^o \in \eta^\perp$ 和 $x_0^{\bar{o}} \in \eta$（不可观测状态）

这说明，一个状态 x_0 即使不属于η，也不能因此就断言该状态属于η 的正交补。

线性时不变系统的规范分解

一、动态方程按可控性分解

设系统动态方程为

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u \quad \text{(2-35)}$$

其可控性矩阵的秩为$n_1 < n$ (n为x的维数)，系统不可控，但可分解出n_1维的可控子系统，有以下定理

定理2–17 对动态方程(2-35)，存在可逆线性变换 $\overline{x} = \mathbf{P}x$ ，将系统化为下列形式

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_2] \bar{x} + \mathbf{D} u \qquad (2\text{-}36)$$

其中 n_1维子方程

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{\mathbf{A}}_{11} \bar{x}_1 + \bar{\mathbf{B}}_1 u$$

$$y_1 = \bar{\mathbf{C}}_1 \bar{x}_1 + \mathbf{D} u \qquad (2\text{-}37)$$

是可控的，且与(2-35)式的系统**有相同的传递函数矩阵**:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}u = \bar{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{D}u$$

$$= [\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_2] \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{11} & -\bar{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \bar{\mathbf{C}}_1 (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{11})^{-1} \bar{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{D}u$$

讨论：

1. 不可控模态不出现在系统的传递函数阵中，这进一步说明了作为输入输出描述的传递函数矩阵不能完全反映系统内部信息，它至多可反映可控的部分;
2. 由(2-36)式：

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & \bar{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \bar{x} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{1} \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

系统的零状态响应为：

$$\bar{x}(t)=\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix} e^{\bar{\mathbf{A}}_{11}(t-\tau)} & * \\ 0 & e^{\bar{\mathbf{A}}_{22}(t-\tau)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$=\int_{t_0}^{t}\begin{bmatrix} e^{\bar{\mathbf{A}}_{11}(t-\tau)}\bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

这说明，不可控制模态所对应的全部运动模式（包含在

$$e^{\bar{\mathbf{A}}_{22}(t-\tau)}$$

之中）与控制作用无耦合关系，这是为什么称不可控模态为系统的**输入解耦零点**的原因。

注意： $<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>=\mathrm{Im}[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\cdots\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]=\mathrm{Im}[\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\cdots\mathbf{q}_{n_1}]$

是**A**不变的。

传递矩阵：

$$\mathbf{G}(s)=\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\bar{\mathbf{C}}(s\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}}$$

$$=[\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_2]\begin{bmatrix} s\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}}_{11} & -\bar{\mathbf{A}}_{12} \\ 0 & s\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$=\bar{\mathbf{C}}_1(s\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}}_{11})^{-1}\bar{\mathbf{B}}_1$$

证完。

例题：设系统方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}x+\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}x$$

试进行可控性分解。

解 1）计算可控性矩阵

$$rank\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = 2$$

2）现取其中的第1,2列，再补充一个与它们线性无关的列向量 $[2 \quad 0 \quad 1]^T$。因此，

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

再利用变换 $\bar{x} = \mathbf{P}x$，可将原系统的动态方程变换为

$$\dot{\bar{x}} = \left[\begin{array}{cc:c} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & -1 \end{array}\right]\bar{x} + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \hdashline 0 \end{array}\right]u \qquad y = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & -1 & -2 \end{array}\right]\bar{x}$$

其中二维方程

$$\dot{\bar{x}}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\bar{x}_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\bar{x}_1$$

是可控的。

注：若改变基底的顺序，可以得到能控性分解的另一形式。令

$$\mathbf{P}^{-1}=[\mathbf{q}_{n_1+1}\cdots\cdots\mathbf{q}_n \,\vdots\, \mathbf{q}_1\cdots\cdots\mathbf{q}_{n_1}]$$

其中$\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_{n_1}$仍为U的一组基。则利用与上面定理相同的证明方法，有

$$\dot{\bar{x}}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{A}}_{11} & 0\\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22}\end{bmatrix}\bar{x}+\begin{bmatrix}0\\ \bar{\mathbf{B}}_2\end{bmatrix}u$$

$$y=[\bar{\mathbf{C}}_1 \quad \bar{\mathbf{C}}_2]\bar{x}$$

其中，$\dot{\bar{x}}_2=\bar{\mathbf{A}}_{22}\bar{x}_2+\bar{\mathbf{B}}_2u$

$$y_1=\bar{\mathbf{C}}_2\bar{x}_2$$

是可控的，且与原系统有相同的传递函数矩阵。

结构分解系统方块图如图2-5所示。

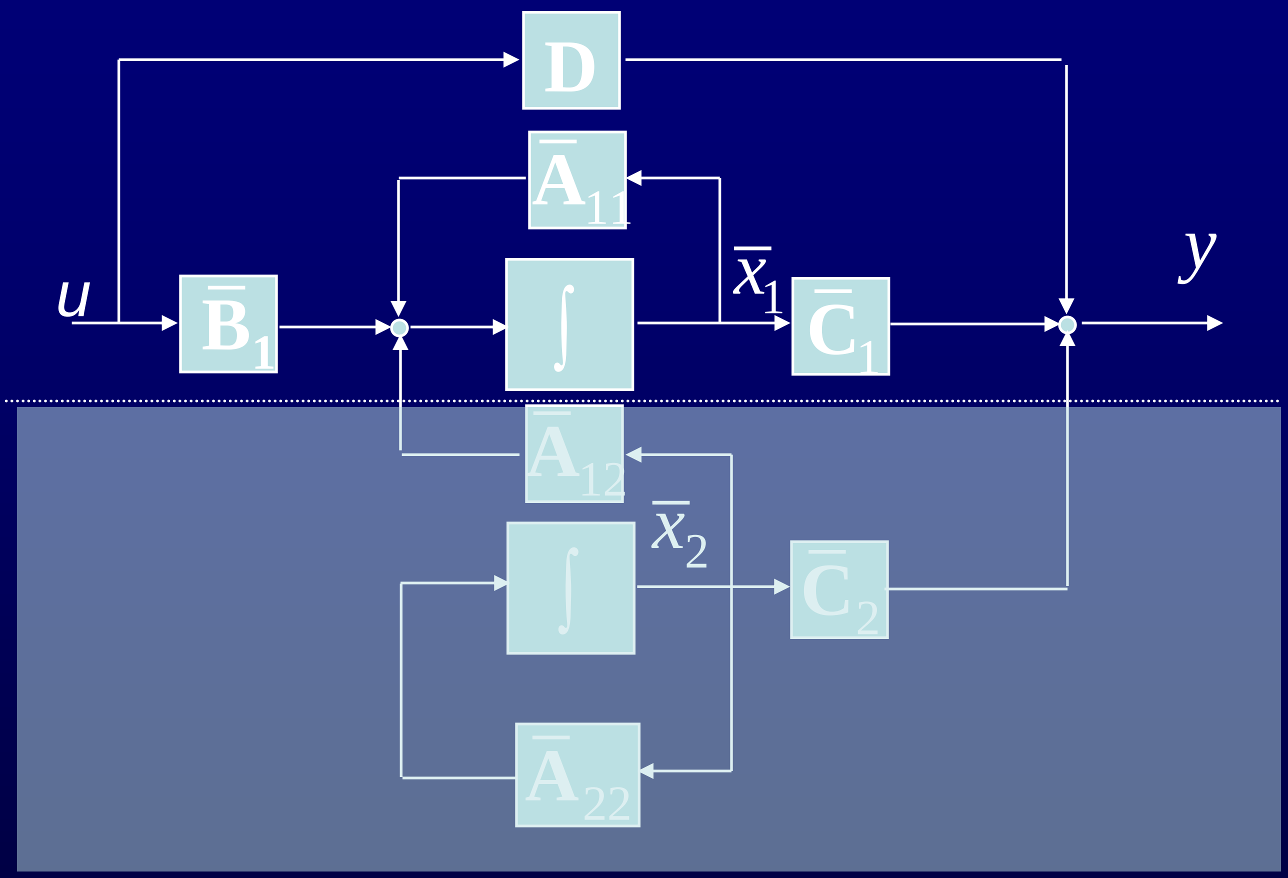


图2-5

可控性分解将可控和不可控部分以显然的形式表示出来了。

二、动态方程按可观测性分解

设系统动态方程为

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u, \quad y = \mathbf{C}x \qquad (2\text{-}35)$$

定理2-18 对动态方程(2-35)，其可观测性矩阵的秩为$n_2 < n$, 则存在等价变换 $\overline{x} = \mathbf{P}x$ ，将系统化为下列形式

$$\dot{\overline{x}} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{A}}_{11} & 0 \\ \overline{\mathbf{A}}_{21} & \overline{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \overline{x} + \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{B}}_1 \\ \overline{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} u \qquad (2\text{-}38)$$

$$y = [\overline{\mathbf{C}}_1 \quad 0]\overline{x} + \mathbf{D}u$$

其中n_2维子方程

$$\dot{\bar{x}}_1 = \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{x}_1 + \bar{\mathbf{B}}_1 u$$
$$y_1 = \bar{\mathbf{C}}_1\bar{x}_1 + \mathbf{D}u \qquad (2\text{-}39)$$

是可观测的，且与原系统有相同的传递函数矩阵:

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \bar{\mathbf{C}}(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{B}} + \mathbf{D}$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{11} & 0 \\ -\bar{\mathbf{A}}_{21} & s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \bar{\mathbf{C}}_1 \left[s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}_{11} \right]^{-1} \bar{\mathbf{B}}_1 + \mathbf{D}$$

讨论：

1. 不可观模态不出现在系统的传递函数阵中，这也进一步说明了作为输入输出描述的传递函数矩阵不能完全反映系统内部信息，它至多可反映可观的部分。
2. 由系统(2-38)的零输入响应：

$$y=[\bar{\mathbf{C}}_1\quad 0]x=[\bar{\mathbf{C}}_1\quad 0]\begin{bmatrix} e^{\bar{\mathbf{A}}_{11}(t-t_0)} & 0 \\ * & e^{\bar{\mathbf{A}}_{22}(t-t_0)} \end{bmatrix}x(t_0)$$

$$=[\bar{\mathbf{C}}_1 e^{\bar{\mathbf{A}}_{11}(t-t_0)}\quad 0]x(t_0)$$

可知，输出中只反映了系统中可观测的模态所对应的运动模式。

定理2-18的结论可以用以下方法求得：

a)直接构造基底矩阵$\mathbf{P}^{-1}$的方法；

b)直接构造基底矩阵$\mathbf{P}$ 的方法。

a)直接构造基底矩阵$\mathbf{P}^{-1}$的方法：

1) 因为可观测性矩阵的秩为n_2， 所以不可观测子空间$\boldsymbol{\eta}$ 是$(n-n_2)$维的子空间。 基底选择可在$\boldsymbol{\eta}$ 中取$n-n_2$ 个线性无关向量

$$\mathbf{q}_{n_2+1}, \mathbf{q}_{n_2+2}, \cdots, \mathbf{q}_n$$

2) 再取另外n_2个线性无关向量，使得向量组

$$\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\cdots,\mathbf{q}_{n_2},\mathbf{q}_{n_2+1},\mathbf{q}_{n_2+2},\cdots,\mathbf{q}_n$$

线性无关，由这n个向量构成状态空间的基底。令

$$\mathbf{P}^{-1}=[\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2,\cdots,\mathbf{q}_{n_2},\mathbf{q}_{n_2+1},\mathbf{q}_{n_2+2},\cdots,\mathbf{q}_n]$$

采取和定理2－17的证明完全类似的方法便可证得定理2－18。

b) 直接取坐标变换阵P的方法：

1) 因为可观性矩阵的秩为n_2，故可在可观性矩阵

中取出n_2个线性无关的**行向量**,设为

$$\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_{n_2}$$

再补充$n-n_2$ 线性无关的行向量

$$\mathbf{p}_{n_2+1},\cdots,\mathbf{p}_n$$

2) 构造:

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n_2} \\ \mathbf{p}_{n_2+1} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix}$$

注意到$\mathbf{p}_1,\cdots,\mathbf{p}_{n_2}$是由

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

的线性无关行构成的，根据凯莱–哈密顿定理知

$$\mathbf{p}_i\mathbf{A}=a_{i1}\mathbf{p}_1+a_{i2}\mathbf{p}_2+\cdots+a_{in_2}\mathbf{p}_{n_2},\ \ i=1,2,\cdots,n_2$$

3) 此时考虑 $\mathbf{PA}=\bar{\mathbf{A}}\mathbf{P}$,有

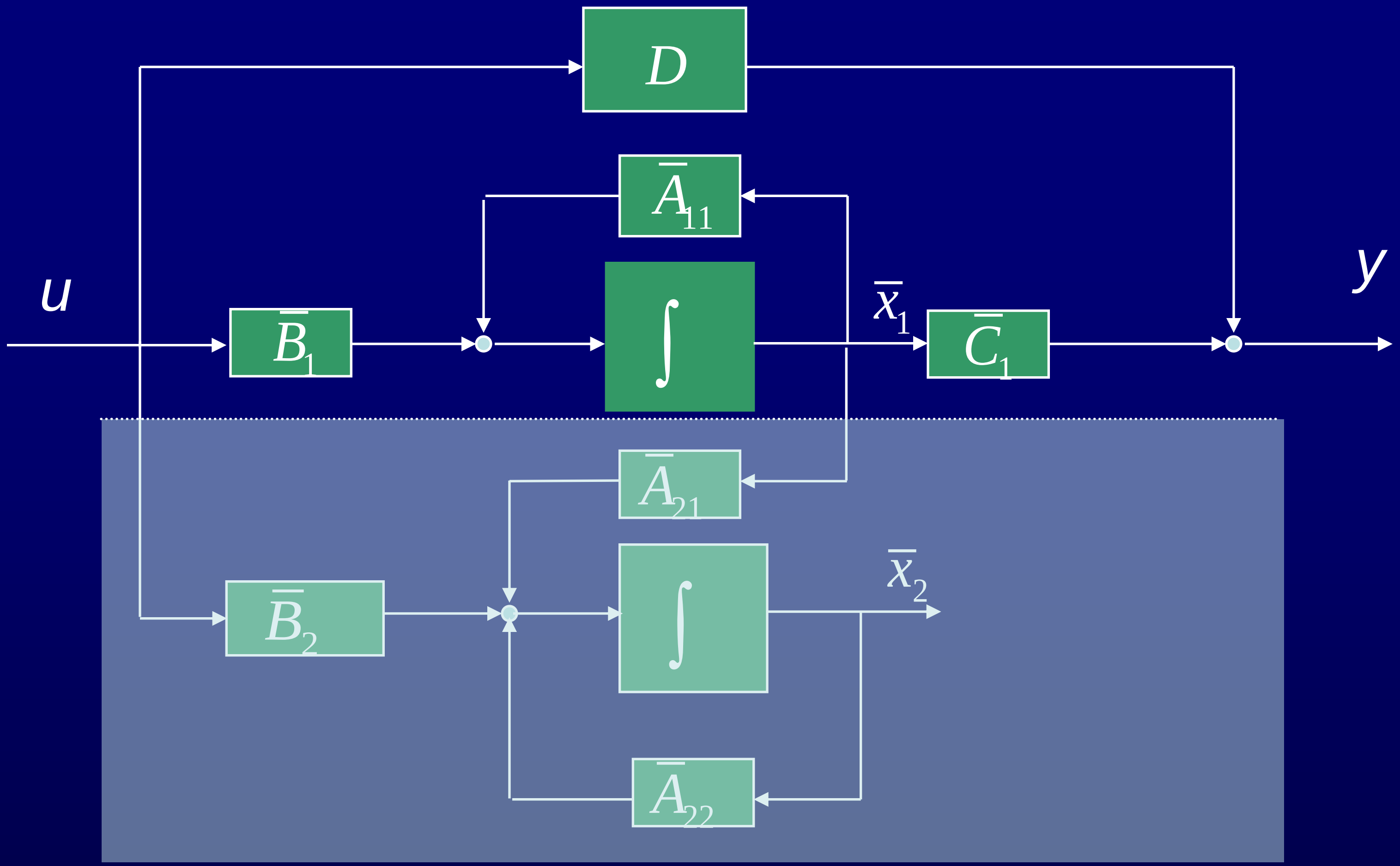
$$\mathbf{PA}=\bar{\mathbf{A}}\mathbf{P} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n_2} \\ \mathbf{p}_{n_2+1} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix} \mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n_2} \\ \mathbf{p}_{n_2+1} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix}$$

4) 考虑 $\mathbf{C}=\bar{\mathbf{C}}\mathbf{P}$ ，有

$$\mathbf{C}=\underbrace{\begin{bmatrix} * & \cdots & * & 0 & \cdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \cdots \\ * & \cdots & * & 0 & \cdots \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{C}}}\begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n_2} \\ \mathbf{p}_{n_2+1} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \end{bmatrix}$$

可观性分解式如下图所示：



由图中可见，输出**y**不能直接反映 $\bar{x}_2$也不能通过 $\bar{x}_1$ 间接反映 $\bar{x}_2$ ，故 $\bar{x}_2$这一部分状态分量是输出不能反映的，它是系统中的不可观部分。

标准分解定理

定理2—19 设动态方程 $\begin{aligned}\dot{x} &= \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y &= \mathbf{C}x + \mathbf{D}u\end{aligned}$ 的可控性矩阵的秩为n_1 ($n_1 < n$)，可观测性矩阵的n_2($n_2 < n$)，则存在一个等价变换 $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}$ ，可将方程变换为

$$\begin{bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_3 \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11} & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{13} & 0 \\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24} \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{33} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{x}}_1 \\ \bar{\mathbf{x}}_2 \\ \bar{\mathbf{x}}_3 \\ \bar{\mathbf{x}}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} \qquad (2-40)$$

$$\mathbf{y}=[\bar{\mathbf{C}}_1 \quad 0 \quad \bar{\mathbf{C}}_3 \quad 0]\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}_1\\ \bar{\mathbf{x}}_2\\ \bar{\mathbf{x}}_3\\ \bar{\mathbf{x}}_4\end{bmatrix}+\mathbf{D}\mathbf{u}$$

而且子系统

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1 &= \bar{\mathbf{A}}_{11}\bar{\mathbf{x}}_1+\bar{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}\\ \mathbf{y}_1 &= \bar{\mathbf{C}}_1\bar{\mathbf{x}}_1+\mathbf{D}\mathbf{u}\end{aligned} \qquad （2—41）$$

是可控可观测的。（2—41）与原系统有相同的传递函数矩阵，即

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\bar{\mathbf{C}}_1(s\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}}_{11})^{-1}\bar{\mathbf{B}}_1$$

证明：按以下步骤：

1. 求η和$<\mathbf{A}|\mathbf{B}>$的一基；

2. 按以下顺序定义子空间$\mathbf{X}_2$， $\mathbf{X}_1$， $\mathbf{X}_4$和$\mathbf{X}_3$为：

$$\mathbf{X}_2\text{：}\quad \mathbf{X}_2=\eta\bigcap<\mathbf{A}|\mathbf{B}>$$

$$\mathbf{X}_1\text{：}\quad \mathbf{X}_1\oplus\mathbf{X}_2=<\mathbf{A}|\mathbf{B}>$$

$$\mathbf{X}_4\text{：}\quad \mathbf{X}_4\oplus\mathbf{X}_2=\eta$$

$$\mathbf{X}_3\text{：}\quad \mathbf{X}_3\oplus\mathbf{X}_4\oplus\mathbf{X}_2\oplus\mathbf{X}_1=\mathbf{X}$$

令$\mathbf{X}_i$的维数分别是k_i，显然，

$$k_1+k_2+k_3+k_4=n$$

讨论：

1） $\mathbf{X}_1$：是关于空间$<\mathbf{A}|\mathbf{B}>$的$\mathbf{A}$不变子空间；即若

$$x\in\mathbf{X}_1,\ 必有\mathbf{A}x\in<\mathbf{A}|\mathbf{B}>;$$

2). $\mathbf{X}_2$：是$\mathbf{A}$的不变子空间；即若$x\in\mathbf{X}_2$，必有$\mathbf{A}x\in\mathbf{X}_2$。

这是因为若$x\in\mathbf{X}_2\Rightarrow x\in\eta$且$x\in<\mathbf{A}|\mathbf{B}>$。而

η、$<\mathbf{A}|\mathbf{B}>$均$\mathbf{A}$不变；

3). $\mathbf{X}_3$：没有特殊性，但$\mathbf{A}\mathbf{X}_3$一定可以由$\mathbf{X}$的一组基线性表示；

4). $\mathbf{X}_4$：是关于空间η的$\mathbf{A}$不变子空间；即若$x\in\mathbf{X}_4$，必有$\mathbf{A}x\in\eta$；

5）. $\mathbf{X}_4\cap\mathbf{X}_1=\{0\}$。

事实上，若$\mathbf{X_4}\cap\mathbf{X_1}$含非零元素将会导致矛盾。令

$$x(\neq 0)\in \mathbf{X_4}\cap\mathbf{X_1}$$

于是，根据$\mathbf{X_1}$的定义：

$$\mathbf{X}_1\text{:}\quad \mathbf{X}_1\oplus\mathbf{X}_2=<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>$$

有

$$x\in<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}> \qquad (1)$$

同理，根据$\mathbf{X_4}$的定义：

有

$$\mathbf{X}_4\text{:}\quad \mathbf{X}_4\oplus\mathbf{X}_2=\eta$$

$$x\in\eta \qquad (2)$$

由(1)、(2)我们有

$$x(\neq 0)\in\eta\cap<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>=\mathbf{X}_2$$ 矛盾。

3.取基底:

$$\mathbf{P}^{-1}=[\underbrace{q_1\cdots q_{k_1}}_{\mathbf{T}_1}\;\vdots\;\underbrace{q_{k_1+1}\cdots q_{k_1+k_2}}_{\mathbf{T}_2}\;\vdots\;\underbrace{q_{k_1+k_2+1}\cdots q_{k_1+k_2+k_3}}_{\mathbf{T}_3}\;\vdots\;\underbrace{q_{k_1+k_2+k_3+1}\cdots q_n}_{\mathbf{T}_4}]$$

即$\mathbf{P}^{-1}=[\mathbf{T}_1\ \mathbf{T}_2\ \mathbf{T}_3\ \mathbf{T}_4]$，其中，$\mathbf{T}_i$ 是$\mathbf{X}_i$的一组基。则

$$\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}=\mathbf{A}[\mathbf{T}_1\ \mathbf{T}_2\ \mathbf{T}_3\ \mathbf{T}_4]=[\mathbf{T}_1\ \mathbf{T}_2\ \mathbf{T}_3\ \mathbf{T}_4]\underbrace{\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{A}}_{11} & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{13} & 0\\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24}\\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{33} & 0\\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{44}\end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}}$$

4. 由$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{B}}$，有

$$\mathbf{B}=[\mathbf{T}_1\ \mathbf{T}_2\ \mathbf{T}_3\ \mathbf{T}_4]\underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_1 \\ \bar{\mathbf{B}}_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{B}}}$$

5. 由$\bar{\mathbf{C}}=\mathbf{C}\mathbf{P}^{-1}$，有

$$\bar{\mathbf{C}}=\mathbf{C}[\mathbf{T}_1\ \mathbf{T}_2\ \mathbf{T}_3\ \mathbf{T}_4]=\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}_1 & 0 & \bar{\mathbf{C}}_3 & 0 \end{bmatrix}$$

这是由于$\eta \subset \mathrm{Ker}(\mathbf{C})$。

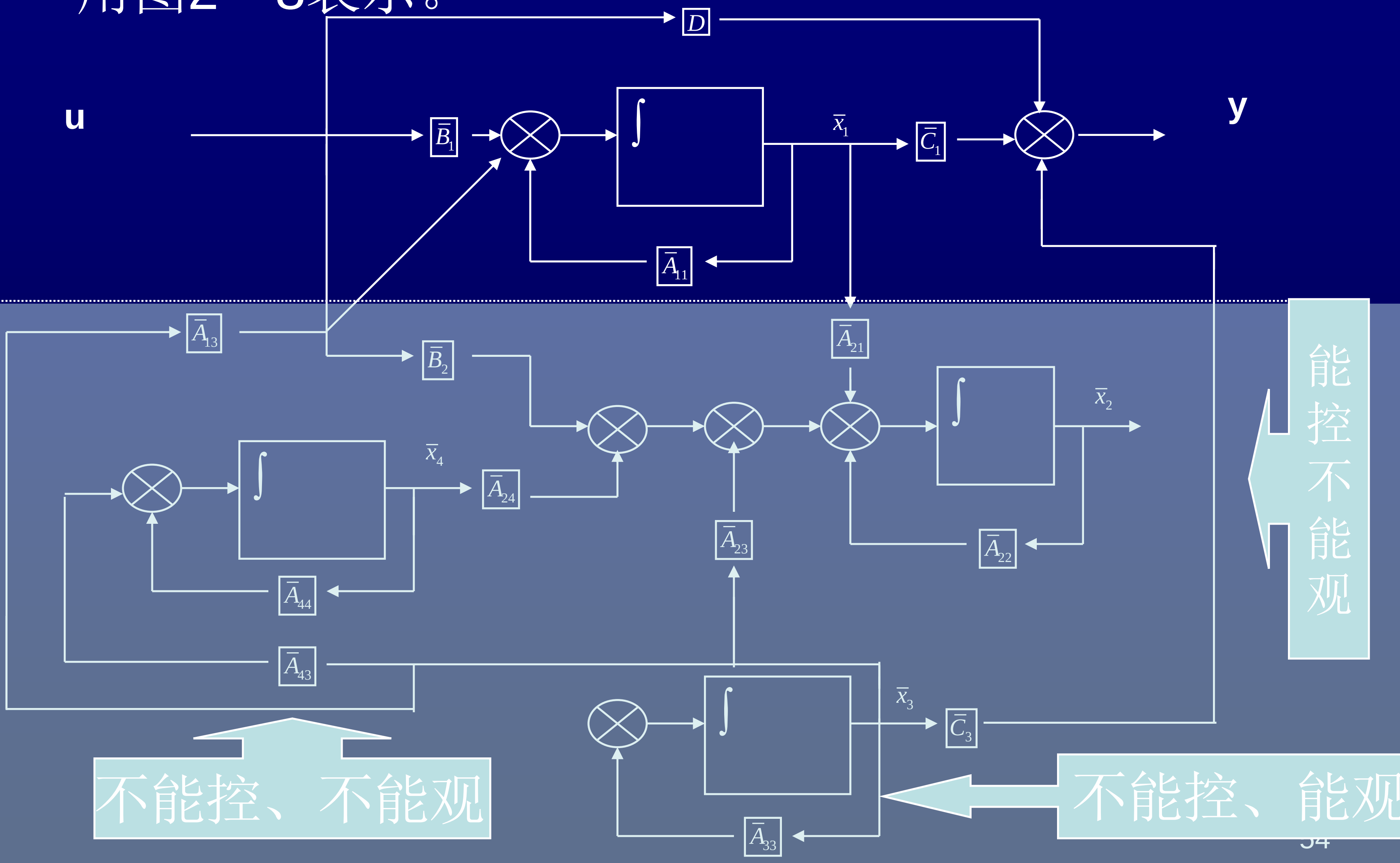
6. 最后考察传递函数。我们有

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\bar{\mathbf{C}}_1(s\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}}_{11})^{-1}\bar{\mathbf{B}}_1$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\bar{\mathbf{x}}}_1\\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_2\\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_3\\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{A}}_{11} & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{13} & 0\\ \bar{\mathbf{A}}_{21} & \bar{\mathbf{A}}_{22} & \bar{\mathbf{A}}_{23} & \bar{\mathbf{A}}_{24}\\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{33} & 0\\ 0 & 0 & \bar{\mathbf{A}}_{43} & \bar{\mathbf{A}}_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}_1\\ \bar{\mathbf{x}}_2\\ \bar{\mathbf{x}}_3\\ \bar{\mathbf{x}}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{B}}_1\\ \bar{\mathbf{B}}_2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$\mathbf{y}=[\bar{\mathbf{C}}_1 \quad 0 \quad \bar{\mathbf{C}}_3 \quad 0]\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{x}}_1\\ \bar{\mathbf{x}}_2\\ \bar{\mathbf{x}}_3\\ \bar{\mathbf{x}}_4\end{bmatrix}$$

经过等价变换后得到的动态方程（2－40），可用图2－8表示。



- 定理2－19表明，动态方程的传递函数矩阵仅仅取决于方程的可控、可观测的部分。

传递函数矩阵（输入－输出描述）仅仅描述了系统的既可控又可观测部分的特性。

这些不出现的传递函数矩阵中的部分其状态行为不可避免地要影响系统的稳定性和品质，这是我们在系统设计中要特别注意的。

例2—19 设单输入单输出系统动态方程如下：

$$\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 2 & 0 & 0\\-6 & -2 & 3 & 0\\-3 & -2 & 0 & 4\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}1\\0\\3\\2\end{bmatrix}u$$

$$\mathbf{y}=[-4\quad -3\quad 1\quad 1]\mathbf{x}$$

现根据前述定义，求出空间$\mathbf{X}_1$、$\mathbf{X}_2$、$\mathbf{X}_3$、$\mathbf{X}_4$中向量的一般形式，并选取等价变换$\bar{\mathbf{x}}=\mathbf{P}\mathbf{x}$，将方程化为标准分解的形式。

1. 求 $<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>$

$$\mathbf{U}=[\mathbf{b}\ \mathbf{Ab}\ \mathbf{A}^2\mathbf{b}\ \mathbf{A}^3\mathbf{b}]=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 3 & 3\\ 2 & 5 & 17 & 65\end{bmatrix}$$

故

$$<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>=\mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\3\\5\end{bmatrix}\right\}$$

2. η的计算： $\eta = \bigcap \ker(\mathbf{cA}^k) \Leftrightarrow$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \mathbf{cA}^2 \\ \mathbf{cA}^3 \end{bmatrix} x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 & 1 \\ -13 & -10 & 3 & 4 \\ -43 & -34 & 9 & 16 \\ -145 & -118 & 27 & 64 \end{bmatrix} x = 0$$

故

$$\eta = \mathrm{span}\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}\}$$

3. 求$\mathbf{X}_2 = \eta \bigcap < \mathbf{A} \mid \mathbf{B} >$。任意$x \in \eta \bigcap < \mathbf{A} \mid \mathbf{B} > \Leftrightarrow$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} x_2, \quad \text{同时有} x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} x_3 + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_4$$

故

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix} = 0$$

有

$$\eta \bigcap <\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}> = \mathbf{X}_2 = \mathrm{span}\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix}\}$$

事实上，在本例中，对 $<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>$ 的基

$$\begin{bmatrix}1\\0\\3\\2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1\\0\\3\\5\end{bmatrix}$$

直接进行线性组合，立即得到上式。

4. 求$\mathbf{X}_1$，使得$\mathbf{X}_1 \oplus \mathbf{X}_2 = <\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>$。显然$\mathbf{X}_1$的选取只需要与$\mathbf{X}_2$线性无关且属于$<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>$即可。

例如，可取

$$\mathbf{X}_1 = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

5. 求$\mathbf{X}_4$，使得$\mathbf{X}_4 \oplus \mathbf{X}_2 = \eta$。

显然$\mathbf{X}_4$的选取只需要与$\mathbf{X}_2$线性无关且属于η即可。

例如，可取

$$\mathbf{X_4} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}\right\} = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$$

6. 求$\mathbf{X}_3$，使得$\mathbf{X}_1$、$\mathbf{X}_2$、$\mathbf{X}_3$、$\mathbf{X}_4$线性无关即可。

例如，可取

$$\mathbf{X_3} = \mathrm{span}\{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\}$$

因此

$$\mathbf{P}^{-1} = [\mathbf{T}_1\ \mathbf{T}_2\ \mathbf{T}_3\ \mathbf{T}_4] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

可算得：

$$\bar{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{C}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -19 & 0 \end{bmatrix}$$

需要特别指出的是，从上面的计算过程可以看出，由于基底的选取不唯一，因此变换后的矩阵形式是不唯一的。

作业：

P75 2-2 a；2-7；2-8； 2-14，2-17，2-18