第七讲

不可简约线性系统与标准形

四、不可简约的动态方程

由定理2－17和定理2－18可以看出，若线性时不变动态方程不可控或不可观测，则存在与原方程有相同传递函数矩阵而维数较低的方程。换言之，若线性时不变动态方程不可控或不可观测，则其维数可以降低，而且降低了维数的方程仍具有与原方程相同的传递函数矩阵。

定义2－11 称线性时不变动态方程是可以简约的，当且仅当存在一个与之零状态等价且维数较低的线性时不变动态方程。否则，则称动态方程是不可简约的。

不可简约的动态方程又称为**最小阶动态方程**。

复习：

1. **定义（零状态等价）**：两个时不变动态系统称为是零状态等价的，当且仅当它们具有相同的脉冲响应矩阵或相同的传递函数阵。

2. ***Sylvester*不等式：**

$$r(\mathbf{F}_{m\times n})+r(\mathbf{G}_{n\times l})-n\le r(\mathbf{FG})\le \min\{r(\mathbf{F}),r(\mathbf{G})\}$$

3. 习题1-25

两个系统零状态等价当且仅当

$$\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B}=\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^k\bar{\mathbf{B}} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

1. 不可简约动态方程的充分必要条件

定理2－20 线性时不变动态方程$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$是不可简约的充分必要条件是$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$是可控且可观测的。

证明：充分性。设动态方程：

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \Leftrightarrow (\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}) \qquad (2-43)$$

只要证明若（2－43）$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$可控可观测，则（2－43）为不可简约。

反证法。设n维动态方程（2－43）可控且可观测，但存在一个维数为$n_1 < n$的线性时不变动态方程

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{B}}\mathbf{u}$$
$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\mathbf{D}}\mathbf{u} \qquad (2\text{-}44)$$

与(**A**, **B**, **C**, **D**)零状态等价。于是，由零状态等价的定义，对于$[0,+\infty)$中所有的t,

$$\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t) = \bar{\mathbf{C}}e^{\bar{\mathbf{A}}t}\bar{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{D}}\delta(t) \qquad （2—45）$$

即有 $\mathbf{C}\mathbf{A}^k\mathbf{B} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^k\bar{\mathbf{B}} \qquad k = 0,1,2,\cdots$

现考虑乘积

$$\mathbf{VU} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n\text{-}1} \end{bmatrix}}_{\mathrm{V}} \underbrace{[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \cdots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]}_{\mathrm{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{CB} & \mathbf{CAB} & \cdots & \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^n\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^n\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CA}^{2(n-1)}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

（2–46）

根据（2—45），用 $\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^k\bar{\mathbf{B}}$ 代替上式中的$\mathbf{CA}^k\mathbf{B}$，得

$$\mathbf{V}_{n-1}\mathbf{U}_{n-1}=\bar{\mathbf{V}}_{n-1}\bar{\mathbf{U}}_{n-1}$$

因为(**A**, **B**, **C**, **D**)可控可观测，根据$Sylvester$不等式：

$$r(\mathbf{V}_{m\times n})+r(\mathbf{U}_{n\times l})-n\le r(\mathbf{VU})\le\min\{r(\mathbf{V}),r(\mathbf{U})\},$$

有$rank$ $\mathbf{VU}=n$。于是

$$rank\bar{\mathbf{V}}_{n-1}\bar{\mathbf{U}}_{n-1}=n>n_1$$

这和 $\bar{\mathbf{V}}_{n-1},\bar{\mathbf{U}}_{n-1}$ 的秩最多是 n_1矛盾。矛盾表明，若(**A**, **B**, **C**, **D**)是可控可观测的，则(**A**, **B**, **C**, **D**)必是不可简约的。

必要性。反证法。设（A，B，C)是不可简约的，但（A，B，C)是不可控或不可观测的。则根据定理2-17，或2-18，存在一个与之零状态等价而维数较低的系统，这说明系统是可简约的，矛盾。

证完。

2. 同一$G(s)$不可简约动态方程实现之间的关系

定理2—21 设动态方程$(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$是$q\times p$正则有理矩阵$\mathbf{G}(s)$的不可简约实现，则 $(\bar{\mathbf{A}},\bar{\mathbf{B}},\bar{\mathbf{C}},\bar{\mathbf{D}})$ 也是 $\mathbf{G}(s)$ 的不可简约实现的充要条件是$(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$ 和 $(\bar{\mathbf{A}},\bar{\mathbf{B}},\bar{\mathbf{C}},\bar{\mathbf{D}})$ 等价。也即存在一个非奇异常量矩阵P，使得

$$\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{PAP}^{-1}\quad \bar{\mathbf{B}}=\mathbf{PB}\quad \bar{\mathbf{C}}=\mathbf{CP}^{-1}\quad \bar{\mathbf{D}}=\mathbf{D}$$

证明：充分性：若$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$为$\mathbf{G}$之不可简约实现且两个系统等价，则

$$\text{定理}2-20 \Rightarrow (\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})\text{可控可观} \xrightarrow[\text{定理}2\text{–}13]{\bar{x}=\mathbf{P}x}$$

$$(\bar{\mathbf{A}},\bar{\mathbf{B}},\bar{\mathbf{C}},\bar{\mathbf{D}})\text{可控可观} \xrightarrow{\text{定理}2-20} (\bar{\mathbf{A}},\bar{\mathbf{B}},\bar{\mathbf{C}},\bar{\mathbf{D}})\text{不可简约}$$

必要性：设U和V是 $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$ 的可控性和可观测性矩阵，$\bar{\mathbf{U}}$ 和 $\bar{\mathbf{V}}$ 是$(\bar{\mathbf{A}},\bar{\mathbf{B}},\bar{\mathbf{C}},\bar{\mathbf{D}})$的可控性和可观测性矩阵。若 $(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D})$ 和 $(\bar{\mathbf{A}},\bar{\mathbf{B}},\bar{\mathbf{C}},\bar{\mathbf{D}})$是同一的 $\mathbf{G}(s)$ 不可简约的实现(因此**它们零状态等价**)，则由（2—45）和（2—46），

$$\mathbf{D} = \bar{\mathbf{D}} \quad \text{且}$$

$$\mathbf{VU} = \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{U}} \qquad (2\text{-}47)$$

$$\mathbf{VAU} = \bar{\mathbf{V}}\,\bar{\mathbf{A}}\,\bar{\mathbf{U}} \qquad (2\text{-}48)$$

这里，$\mathbf{U}$和$\bar{\mathbf{U}}$均为$n \times np$阵，$\mathbf{V}$和$\bar{\mathbf{V}}$均为$nq \times n$阵，且

$$rank(\mathbf{U}) = rank(\mathbf{V}) = rank(\bar{\mathbf{U}}) = rank(\bar{\mathbf{V}}) = n$$

分以下步骤证明：

1）因为V列满秩，U行满秩，故它们的伪逆存在且

$$\mathbf{V}^{+}{}_{n\times nq} = (\mathbf{V}^{*}\mathbf{V})^{-1}\mathbf{V}^{*}$$

$$\mathbf{U}^{+}{}_{np\times n} = \mathbf{U}^{*}(\mathbf{U}\mathbf{U}^{*})^{-1}$$

由（2—47）

$$\mathbf{V}\mathbf{U} = \bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{U}}$$

故

$$\mathbf{V}^{+}\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{+} = (\mathbf{V}^{+}\bar{\mathbf{V}})_{n\times n}(\bar{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{+})_{n\times n} = \mathbf{I}$$

2）令

$$\mathbf{P} = \bar{\mathbf{U}}_{n\times np}\mathbf{U}^{+}{}_{np\times n}$$

则由逆矩阵的唯一性，

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{V}^{+}{}_{n\times nq}\bar{\mathbf{V}}_{nq\times n} \qquad （2—49）$$

3）证明矩阵

$$\mathbf{P} = \bar{\mathbf{U}}_{n\times np}\mathbf{U}^{+}{}_{np\times n}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{V}^{+}{}_{n\times nq}\bar{\mathbf{V}}_{nq\times n} \qquad （2—49）$$

就是等价变换矩阵。为此，由

$$\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{VAU}$$

可得

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbf{V}^{+}\bar{\mathbf{V}}}_{\mathbf{P}^{-1}}\bar{\mathbf{A}}\underbrace{\bar{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{+}}_{\mathbf{P}} = \mathbf{A}$$

即

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}$$

而

$$\mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^{+}\bar{\mathbf{V}}\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^{+}\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{n-1} \end{bmatrix}\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{V}^{+}\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}} \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}} \end{bmatrix}$$

且 $\mathbf{C}\mathbf{A}^{k}\mathbf{B} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k}\bar{\mathbf{B}}$, $\mathbf{V}^{+}\begin{bmatrix} \mathbf{CB} \\ \mathbf{CAB} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = \mathbf{V}^{+}\mathbf{V}\mathbf{B} = \mathbf{B}$

上式即 $\bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}\mathbf{B}$

最后

$$\bar{\mathbf{C}}\mathbf{P} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{U}}\mathbf{U}^{+} = \bar{\mathbf{C}}[\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}]\mathbf{U}^{+}$$

$$= [\bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{B}} \quad \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{B}} \quad \cdots \quad \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{n-1}\bar{\mathbf{B}}]\mathbf{U}^{+}$$

又因为

$$\mathbf{C}\mathbf{A}^{k}\mathbf{B} = \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{A}}^{k}\bar{\mathbf{B}},$$

$$[\mathbf{CB} \quad \mathbf{CAB} \quad \cdots \quad \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{B}]\mathbf{U}^{+} = \mathbf{CUU}^{+} = \mathbf{C}$$

上式即 $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{CP}^{-1}$

证完。

以上证明过程是构造性的，（2—49）式给出了等价变换矩阵的求法。

线性时不变系统的标准形

LTI系统的标准形

一、单变量系统 $\begin{cases} \dot{x} = Ax + bu \\ y = cx + du \end{cases}$ 的标准形

A的特征多项式为:

$$\Delta(s) = \det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots + a_n$$

系统的可控和可观测矩阵为:

$$\mathbf{U} = [\mathbf{b}\ \mathbf{Ab} \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] \in \mathbf{R}^{n\times n}, \quad \mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \vdots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n\times n}$$

问题的提法：给定$(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d)$,找一个等价线性变换$\bar{x} = \mathbf{P}x$使得

$$(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, d) \xrightarrow{\bar{x} = \mathbf{P}x} (\bar{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}, \bar{d})$$为具有某种性质的标准形。

这里，$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}, \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{Pb}, \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{cP}^{-1}, \bar{d} = d$

1. 可控标准形

定理3-1： 设系统(3-1)可控，则可通过等价变换将其变成如下所示的可控标准形(第二可控标准形)：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [\beta_n \quad \beta_{n-1} \quad \cdots \quad \beta_2 \quad \beta_1] x + du$$

- **求可控标准形的方法一：先求变换阵P**

1)计算可控性矩阵$\mathbf{U}=[\mathbf{b}\ \mathbf{Ab}\cdots\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]$;

2)计算$\mathbf{U}^{-1}$，并记其最后一行为$\mathbf{h}$;

3)给出变换阵：$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{hA}\\ \mathbf{hA}^2\\ \vdots\\ \mathbf{hA}^{n-1}\end{bmatrix}_{n\times n};$$

4)由$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1}, \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{Pb}, \bar{\mathbf{c}} = \mathbf{cP}^{-1}$即可求出变换后的系统状态方程。

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{hA} \\ \mathbf{hA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{hA}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \mathbf{A} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & & -a_1 \end{bmatrix}}^{\bar{\mathbf{A}}} \begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{hA} \\ \mathbf{hA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{hA}^{n-1} \end{bmatrix}$$

其中，

$$\mathbf{hA}^n = -a_n\mathbf{h} - a_{n-1}\mathbf{hA} - a_{n-2}\mathbf{hA}^2 - \cdots - a_1\mathbf{hA}^{n-1}$$

另一方面，注意到$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{U} = \mathbf{I}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \times \\ \vdots \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} [\mathbf{b}\ \mathbf{A}\mathbf{b} \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}] = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

我们有

$$\mathbf{h}\mathbf{b} = 0, \mathbf{h}\mathbf{A}\mathbf{b} = 0, \cdots,\ \ \mathbf{h}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b} = 0, \mathbf{h}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} = 1$$

$$\therefore \bar{\mathbf{b}} = \mathbf{P}\mathbf{b} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{h}\mathbf{A} \\ \mathbf{h}\mathbf{A}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{h}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

问题：这样构造的**P**是否可逆？

为证明**P**为可逆阵，只要证明对任意给定的

$$\alpha=[\alpha_1\ \alpha_2\cdots\alpha_n]$$

由

$$\alpha\mathbf{P}=\alpha\begin{bmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{hA}\\ \mathbf{hA}^2\\ \vdots\\ \mathbf{hA}^{n-1}\end{bmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow\alpha_1\mathbf{h}+\alpha_2\mathbf{hA}+\cdots+\alpha_n\mathbf{hA}^{n-1}=0$$

$$\Rightarrow\alpha\equiv 0$$

即可。

为此，我们考虑

$$\alpha_1\mathbf{h}+\alpha_2\mathbf{hA}+\cdots+\alpha_n\mathbf{hA}^{n-1}=0 \qquad (*)$$

1) 用**b**右乘上式，并考虑到

$$\mathbf{hb}=0,\ \mathbf{hAb}=0,\ \mathbf{hA}^{n-2}\mathbf{b}=0,\ \mathbf{hA}^{n-1}\mathbf{b}=1, \qquad (3\text{-}4)$$

有

$$\alpha_n=0;$$

2) 用**Ab**右乘（*）式，并考虑到（3-4）及$\alpha_n=0$之事实，有

$$\alpha_{n-1}=0$$

$$\vdots$$

依次类推，有

$$\alpha_i=0 \Rightarrow \alpha\equiv 0$$

▪ 求可控标准形的方法二：先求变换阵$\mathbf{P}^{-1}$

1). 令基底为：

$$\mathbf{P}^{-1}=[\mathbf{b}\ \mathbf{A}\mathbf{b}\cdots\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \iddots & \vdots \\ a_1 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}:=[\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2\cdots\mathbf{q}_n]$$

注意到$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n$

显然有 $\mathbf{q}_n=\mathbf{b}$

而 $$\mathbf{q}_1=a_{n-1}\mathbf{b}+a_{n-2}\mathbf{A}\mathbf{b}+\cdots+\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$$

$$=a_{n-1}\mathbf{q}_n+\mathbf{A}\underbrace{\left(a_{n-2}\mathbf{b}+\cdots+\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b}\right)}_{\mathbf{q}_2}=a_{n-1}\mathbf{q}_n+\mathbf{A}\mathbf{q}_2$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{q}_2=\mathbf{q}_1-a_{n-1}\mathbf{q}_n$$

$$\mathbf{q}_2 = a_{n-2}\mathbf{b} + a_{n-3}\mathbf{A}\mathbf{b} + \cdots + \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b}$$

$$= a_{n-2}\mathbf{q}_n + \mathbf{A}\underbrace{\left(a_{n-3}\mathbf{b} + \cdots + \mathbf{A}^{n-3}\mathbf{b}\right)}_{\mathbf{q}_3} = a_{n-2}\mathbf{q}_n + \mathbf{A}\mathbf{q}_3$$

$$\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{q}_3 = \mathbf{q}_2 - a_{n-2}\mathbf{q}_n$$

依次，有 $\mathbf{q}_i = a_{n-i}\mathbf{q}_n + \mathbf{A}\mathbf{q}_{i+1},\ i = 1, 2, \cdots, n-1,$

$$\Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{q}_i - a_{n-i}\mathbf{q}_n,\ i = 1, 2, \cdots, n-1$$

最后，由 $\mathbf{q}_1 = a_{n-1}\mathbf{b} + a_{n-2}\mathbf{A}\mathbf{b} + \cdots + \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$

考虑到凯莱－哈密尔顿定理，有

$$\mathbf{A}\mathbf{q}_1 = a_{n-1}\mathbf{A}\mathbf{b} + a_{n-2}\mathbf{A}^2\mathbf{b} + \cdots + a_1\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} + \mathbf{A}^n\mathbf{b} = -a_n\mathbf{q}_n$$

因此，

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1} \Rightarrow \mathbf{AP}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{A}} \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{AP}^{-1} = \mathbf{A}[\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2 \cdots \mathbf{q}_n] = [\mathbf{Aq}_1\ \mathbf{Aq}_2 \cdots \mathbf{Aq}_n]$$

$$= [\mathbf{q}_1\ \mathbf{q}_2 \cdots \mathbf{q}_n] \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{A}}}$$

其中，用到了关系：

$$\mathbf{Aq}_{i+1} = \mathbf{q}_i - a_{n-i}\mathbf{q}_n, i = 1, 2, \cdots, n-1;$$

$$\mathbf{Aq}_1 = -a_n\mathbf{q}_n$$

2）因

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{P}\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{b} = \mathbf{P}^{-1}\bar{\mathbf{b}}$$

$$= [\mathbf{b}\ \ \mathbf{A}\mathbf{b} \cdots \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & & & 0 \end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\bar{\mathbf{b}}}$$

3) $\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{c}\mathbf{P}^{-1} := [\beta_n \quad \beta_{n-1} \quad \cdots \quad \beta_2 \quad \beta_1]$

讨论：1). 由变换阵的唯一性可给出$\mathbf{P}$为：

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{h}\\ \mathbf{hA}\\ \mathbf{hA}^2\\ \vdots\\ \mathbf{hA}^{n-1}\end{bmatrix}=\underbrace{\left([\mathbf{b}\ \mathbf{Ab}\cdots\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]\begin{bmatrix}a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1\\ a_{n-2} & a_{n-3} & \iddots & 1 & 0\\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 & 0\\ a_1 & 1 & 0 & & \\ 1 & 0 & & & 0\end{bmatrix}\right)^{-1}}_{\mathbf{P}^{-1}}$$

2).变换阵的唯一性：

命题： 设$(\mathbf{A},\mathbf{b})$可控，若有满秩线性变换阵$\mathbf{P}_1$和$\mathbf{P}_2$，

使得
$$\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{P}_1\mathbf{A}\mathbf{P}_1^{-1},\bar{\mathbf{b}}=\mathbf{P}_1\mathbf{b};$$
$$\bar{\mathbf{A}}=\mathbf{P}_2\mathbf{A}\mathbf{P}_2^{-1},\bar{\mathbf{b}}=\mathbf{P}_2\mathbf{b}$$

则必有 $\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_2$

2. 第一可控标准形

定理3-1*： 设系统(3-1)可控，则可通过等价变换将其变成如下所示的第一可控标准形：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [\ \beta_n \quad \cdots \quad \beta_2 \quad \beta_1] x + du$$

例题: 设系统状态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ 1 & -4 & 0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u$$

试将系统状态方程化为第二可控标准形。

解: 先判断可控性，再计算变换矩阵，将状态方程化为可控标准形。

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \mathbf{A}^2\mathbf{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3 & -14\\ 1 & -2 & 4\\ 1 & -4 & 11\end{bmatrix}$$

$\det\mathbf{U}\neq 0$, 故系统可控。

现构造变换矩阵 P

$$\mathbf{U}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 5 & -2 & 2\\ 2 & -1 & 1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{h}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

则变换矩阵为 $\mathbf{P}=[\mathbf{h}^T\ (\mathbf{hA})^T\ (\mathbf{hA}^2)^T]^T$

即

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -3 & 2 & -2\\ 4 & -2 & 3\end{bmatrix} \qquad \mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{PAP}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{Pb} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}}) = s^3 + 4s^2 + 5s + 2$$

3. 可观测标准形实现

定理3-2：设系统(3-1)可观，则可通过等价变换将其变成如下所示的可观标准形：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & -a_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix}u$$

$$y=[0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1]x+du$$

一个单输出系统如果其A、c 阵有如上的标准形式，它一定是可观测的，可以通过PBH检验立即看出。

- **求可观标准形的方法一：先求变换阵P^{-1}**

1)计算可观测性矩阵$\mathbf{V}=\begin{bmatrix}\mathbf{c}\\ \mathbf{cA}\\ \vdots\\ \mathbf{cA}^{n-1}\end{bmatrix}$;

2)计算$\mathbf{V}^{-1}$，并记其最后一列为$\mathbf{h}$;

3)给出变换阵：$\mathbf{P}^{-1}=[\mathbf{h}\ \mathbf{Ah}\cdots\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{h}]_{n\times n}$;

- **求可观标准形的方法二：先求变换阵P**

$$
\mathbf{P}=\begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \iddots & \vdots \\ a_1 & 1 & 0 & & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \vdots \\ \mathbf{cA}^{\mathbf{n-1}} \end{bmatrix}
$$

以上两种求**P**阵的方法的分析均与可控标准形求**P**阵的方法类似。

思考题：给出对偶于第一可控标准形的可观标准形。

二、 多变量系统的标准形

1. *Luenberger* 可控标准形

考虑多变量系统 $\begin{cases} \dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \\ y = \mathbf{C}x + \mathbf{D}u \end{cases}$ (3−15)

定理3-3 设系统(3-15)可控，则存在等价变换将其化为(3-16)所示的可控标准形。

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{x} + \bar{\mathbf{B}}u \\ y &= \bar{\mathbf{C}}\bar{x} + \bar{\mathbf{D}}u \end{aligned} \qquad (3\text{-}16)$$

其中

$$
\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \cdots & \mathbf{A}_{1p} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \mathbf{A}_{p1} & & & & \mathbf{A}_{pp} \end{bmatrix} \qquad \bar{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \mathbf{B}_p \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{A}_{ii} = \left[\begin{array}{c:cccc} 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \\ \hdashline \times & \times & \cdots & \times & \times \end{array}\right] \qquad \mathbf{A}_{ij} = \begin{bmatrix} \boxed{\qquad 0 \qquad} \\ \times \ \cdots \ \times \ \times \ \times \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_i = \begin{bmatrix} \boxed{\qquad 0 \qquad} \\ 0 \ \cdots \ 1 \ \times \ \times \end{bmatrix}
$$

这里$\mathbf{A}_{ii},\mathbf{A}_{ij},\mathbf{B}_i$分别是$\mu_i\times\mu_i,\mu_i\times\mu_j,\mu_i\times p$ 的矩阵。

$$
\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc:cccc:c:cccc}
0 & 1 & & 0 & 0 & & & & \cdots & 0 & 0 & & 0 \\
0 & & \ddots & & & & & & & & & & \\
 & & & 1 & & & & & & & & & \\
\times & \times & & \times & \times & \times & & \times & & \times & \times & & \times \\
\hdashline
0 & & & 0 & 0 & 1 & & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & & & & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & \cdots & 0 & 0 & & 0 \\
\times & \times & & \times & \times & \times & & \times & & \times & \times & & \times \\
\hdashline
\vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\hdashline
0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 \\
 & & & & & & & & & & & \ddots & \\
0 & & & 0 & 0 & 0 & & 0 & & & & & 1 \\
\times & \times & & \times & \times & \times & & \times & \cdots & \times & \times & \cdots & \times
\end{array}\right]
$$

$$
\sum_{1}^{p} \mu_i = n \qquad \underbrace{\hphantom{0000}}_{\mu_1} \qquad \underbrace{\hphantom{0000}}_{\mu_2} \qquad \underbrace{\hphantom{0000}}_{\mu_p}
$$

$$\bar{\mathbf{B}}=\left[\begin{array}{c}
\left.\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \times & \cdots & \times \end{matrix}\right\}\mu_1 \\
\hdashline
\left.\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \times \end{matrix}\right\}\mu_2 \\
\hdashline
\begin{matrix} \quad & \vdots & \quad & \vdots \end{matrix} \\
\hdashline
\left.\begin{matrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{matrix}\right\}\mu_p
\end{array}\right]$$

$$\bar{\mathbf{C}}=\mathbf{CP}^{-1}$$

没有任何特点

下面介绍变换的具体做法。

1）．不失一般性，假设$\mathbf{B}=[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2, \cdots\cdots \mathbf{b}_p]$列满秩；

2）．列出可控性矩阵：

$$\mathbf{U}=[\underbrace{\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\cdots\mathbf{b}_p}_{\mathbf{B}}\ \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{b}_1\ \mathbf{A}\mathbf{b}_2\cdots\mathbf{A}\mathbf{b}_p}_{\mathbf{AB}}\cdots\ \underbrace{\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_1\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_2\cdots\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_p}_{\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}}]$$

按上面的排列顺序，自左向右挑选出n个线性无关向量，再重新排列如下：

$$\mathbf{b}_1\ \mathbf{A}\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{A}^{\mu_1-1}\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{A}\mathbf{b}_2\cdots\mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_2\cdots\mathbf{b}_p\ \mathbf{A}\mathbf{b}_p\cdots\mathbf{A}^{\mu_p-1}\mathbf{b}_p$$

显然有 $\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_p=n$

3). 令 $\mathbf{P}_1^{-1} =$

$$[\underbrace{\mathbf{b}_1\ \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{A}^{\mu_1 - 1}\mathbf{b}_1}_{\mu_1}\ \underbrace{\mathbf{b}_2\ \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{A}^{\mu_2 - 1}\mathbf{b}_2}_{\mu_2} \cdots \underbrace{\mathbf{b}_p\ \mathbf{A}\mathbf{b}_p \cdots \mathbf{A}^{\mu_p - 1}\mathbf{b}_p}_{\mu_p}]$$

4） 求出 P_1 以 $\mathbf{h}_i$ 表示P_1阵的 μ_1、 $\mu_1+\mu_2$、 $\cdots$及 $\sum_1^p \mu_i$行，

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \vdots \\ \mathbf{h}_1 \\ \times \\ \vdots \\ \times \\ \times \\ \vdots \\ \mathbf{h}_p \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \mu_1 \\ \\ \vdots \\ \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \mu_p \end{matrix}$$

$\leftarrow$ μ_1行

$\leftarrow$ $\sum_1^p \mu_i$=第n行

5）.然后构造变换阵:

$$\mathbf{P}_2 = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} h_1 \\ h_1\mathbf{A} \\ \vdots \\ h_1\mathbf{A}^{\mu_1-1} \\ \hdashline h_2 \\ \vdots \\ h_2\mathbf{A}^{\mu_2-1} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline h_p \\ \vdots \\ h_p\mathbf{A}^{\mu_p-1} \end{array}\right] \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{array}{c} h_1 \\ h_1\mathbf{A} \\ \vdots \\ h_1\mathbf{A}^{\mu_1-1}\end{array}}\right\} \mu_1 \\ \vdots \\ \left.\vphantom{\begin{array}{c} h_p \\ \vdots \\ h_p\mathbf{A}^{\mu_p-1}\end{array}}\right\} \mu_p \end{array} \end{array}$$

取非奇异变换 $\bar{x} = \mathbf{P}_2 x, (x = \mathbf{P}_2^{-1}\bar{x})$ 就可得到

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}_2\mathbf{A}\mathbf{P}_2^{-1}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}_2\mathbf{B}, \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}_2^{-1}$$

讨论：1）P_2的可逆性证明：

只要证明：若有列向量α，满足$\mathbf{P}_2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha \equiv 0$即可。

a）由

$$\mathbf{P}_2\alpha = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_1\mathbf{A} \\ \vdots \\ h_1\mathbf{A}^{\mu_1-1} \\ \hdashline h_2 \\ \vdots \\ h_2\mathbf{A}^{\mu_2-1} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline h_p \\ \vdots \\ h_p\mathbf{A}^{\mu_p-1} \end{bmatrix}\alpha = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{h}_i\mathbf{A}^{j_i}\alpha = 0, i = 1,2,\cdots,p; j_i = 0,1,\cdots,\mu_i - 1 \quad (a-1)$$

特别，有

$$\begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_p \end{bmatrix}_{p\times n} \alpha = 0$$

b) 易见，$[\mathbf{h}_1^T, \cdots, \mathbf{h}_p^T]^T$ 的零空间恰恰是由 $\mathbf{P}_1^{-1}$ 中除去 $\mathbf{A}^{\mu_i - 1}\mathbf{b}_i$ 后的向量

$$\underbrace{\mathbf{b}_1\ \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{A}^{\mu_1-2}\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{A}^{\mu_2-2}\mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{b}_p\ \mathbf{A}\mathbf{b}_p \cdots \mathbf{A}^{\mu_P-2}\mathbf{b}_p}_{n\times(n-p)}$$

所张成的，因而 α 必可表示为这些向量的线性组合。

这是由于（以 $p=2$ 为例说明）

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \vdots \\ \mathbf{h}_1 \\ \times \\ \times \\ \vdots \\ \mathbf{h}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_1} \underbrace{[\mathbf{b}_1\ \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{A}^{\mu_1-1}\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_2]}_{\mathbf{P}_1^{-1}} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{h}_1\mathbf{b}_1 = 0,\ \mathbf{h}_1\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = 0, \cdots, \mathbf{h}_1\mathbf{A}^{\mu_1-2}\mathbf{b}_1 = 0,\ \mathbf{h}_1\mathbf{A}^{\mu_1-1}\mathbf{b}_1 = 1$$

$$\mathbf{h}_1\mathbf{b}_2 = 0,\ \mathbf{h}_1\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = 0, \cdots, \mathbf{h}_1\mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_2 = 0;$$

$$\mathbf{h}_2\mathbf{b}_1 = 0,\ \mathbf{h}_2\mathbf{A}\mathbf{b}_1 = 0, \cdots, \mathbf{h}_2\mathbf{A}^{\mu_1-1}\mathbf{b}_1 = 0;$$

$$\mathbf{h}_2\mathbf{b}_2 = 0,\ \mathbf{h}_2\mathbf{A}\mathbf{b}_2 = 0, \cdots, \mathbf{h}_2\mathbf{A}^{\mu_2-2}\mathbf{b}_2 = 0, \mathbf{h}_2\mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_2 = 1$$

这说明$[\mathbf{h}_1^T, \cdots, \mathbf{h}_p^T]^T$的零空间确实是由这些向量所张成的。

一般地，我们有

$$\mathbf{h}_i\mathbf{A}^{\mu_i-1}\mathbf{b}_i=1, i=1,2,\cdots,p$$

及

$$\mathbf{h}_i\mathbf{A}^{j}\mathbf{b}_k=0,$$

$$\text{若}\, k\neq i, \text{或者}\, k=i\, \text{但}\, j<\mu_i-1. \quad (a-2)$$

c)将α表示为这些向量的线性组合：

$$\alpha=\sum_{0}^{\mu_1-2}a_{1i}\mathbf{A}^i\mathbf{b}_1+\sum_{0}^{\mu_2-2}a_{2i}\mathbf{A}^i\mathbf{b}_2+\cdots+\sum_{0}^{\mu_p-2}a_{pi}\mathbf{A}^i\mathbf{b}_p$$

现用$\mathbf{h}_1\mathbf{A}$左乘上式两边，并注意到$(a\text{-}1)$式、$(a\text{-}2)$式，有

$$\mathbf{h}_1\mathbf{A}\alpha = 0$$

$$= \sum_0^{\mu_1-2} a_{1i}\mathbf{h}_1\mathbf{A}^{i+1}\mathbf{b}_1 + \sum_0^{\mu_2-2} a_{2i}\mathbf{h}_1\mathbf{A}^{i+1}\mathbf{b}_2 + \cdots + \sum_0^{\mu_p-2} a_{pi}\mathbf{h}_1\mathbf{A}^{i+1}\mathbf{b}_p$$

$$\Rightarrow a_{1\mu_1-2}\underbrace{\mathbf{h}_1\mathbf{A}^{\mu_1-1}\mathbf{b}_1}_{=1} = 0 \Rightarrow a_{1\mu_1-2} = 0;$$

再左乘$\mathbf{h}_2\mathbf{A}$，有

$$a_{2\mu_2-2}\mathbf{h}_2\mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_2 = 0 \Rightarrow a_{2\mu_2-2} = 0, \cdots,$$

依次类推，我们可以证明$\alpha \equiv 0$。 **证完。**

2) $\bar{\mathbf{B}}=\mathbf{P}_2\mathbf{B}$的特点：

$$\bar{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \times & \cdots & \times \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & \times \\ \hdashline & \vdots & & \vdots \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

问题：为什么具有形式：

$[0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1 \quad \times \quad \cdots]$?

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \times \\ \times \\ \vdots \\ \mathbf{h}_1 \\ \times \\ \times \\ \vdots \\ \mathbf{h}_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}_1}$$

以$p=2$为例：

$$\mathbf{h}_1\mathbf{A}^{\mu_1-1}[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2]=[1\quad \times]$$

$$\mathbf{h}_1\mathbf{B}=0 \quad \mathbf{h}_1\mathbf{AB}=0$$

$$\underbrace{[\mathbf{b}_1\ \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{A}^{\mu_1-1}\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_2]}_{\mathbf{P}_1^{-1}}=\mathbf{I}=\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由此推得：

$$\mathbf{h}_1\mathbf{B}=0,\cdots,\mathbf{h}_1\mathbf{A}^{\mu_1-2}\mathbf{B}=0;\ \ \mathbf{h}_1\mathbf{A}^{\mu_1-1}\mathbf{B}=[1\quad \times]$$

$\vdots$

$$\mathbf{h}_2\mathbf{B}=0,\cdots,\mathbf{h}_2\mathbf{A}^{\mu_2-2}\mathbf{B}=0;$$

$$\mathbf{h}_2\mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{B}=\mathbf{h}_2\mathbf{A}^{\mu_2-1}[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2]?$$

为讨论 $\mathbf{h}_2\mathbf{B}=0,\cdots,\mathbf{h}_2\mathbf{A}^{\mu_2-2}\mathbf{B}=0;\mathbf{h}_2\mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{B}=\mathbf{h}_2\mathbf{A}^{\mu_2-1}[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2]$?

注意到基底的选取法则：

$$\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\quad \mathbf{Ab}_1\ \mathbf{Ab}_2\quad \cdots\quad \mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_1\ \mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_2$$

$$\xrightarrow{\hspace{15em}}$$

1）若$\mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_1$出现在上述列中，必有$\mathbf{h}_2\mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_1=0$;

$$\Rightarrow \mathbf{h}_2\mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{B}=\mathbf{h}_2\mathbf{A}^{2}[\mathbf{b}_1\ \ \mathbf{b}_2]=[0\ 1]$$

2）若$\mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_1$不出现在上述各列中，则必可表示为

$$\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \mathbf{Ab}_1\ \mathbf{Ab}_2\cdots\mathbf{Ab}_p\cdots\mathbf{A}^{\mu_2-2}\mathbf{b}_1\ \mathbf{A}^{\mu_2-2}\mathbf{b}_2$$

的线性组合，故仍有

$$\mathbf{h}_2\mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_1=0$$

$$\Rightarrow \mathbf{h}_2\mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{B}=\mathbf{h}_2\mathbf{A}^{2}[\mathbf{b}_1\ \ \mathbf{b}_2]=[0\ 1]$$

一般地，若基底矩阵$(\mathbf{P}_1)^{-1}$是按照如下方法得到：

$$\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\cdots\mathbf{b}_p\quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1\ \mathbf{A}\mathbf{b}_2\cdots\mathbf{A}\mathbf{b}_p\ \cdots\mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_1\ \mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_2\cdots\mathbf{A}^{\mu_2-1}\mathbf{b}_p\cdots$$

则必有

$$\bar{\mathbf{B}}=\left[\begin{array}{cccc}
0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
1 & \times & \cdots & \times \\
\hdashline
0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & \times \\
\hdashline
 & \vdots & & \vdots \\
\hdashline
0 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right]$$

P.85　例题3-2　设系统动态方程(A, B, C)为

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&-2\\-22&-11&-4&0\\-23&-6&0&-6\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&1\\1&3\end{bmatrix}\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

试求其可控标准形。

解　计算可控性矩阵

$\mathbf{Ab_2}$　$\mathbf{A^2b_1}$

$$[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\ \mathbf{A^2B}\ \mathbf{A^3B}]=\begin{bmatrix}0&0&1&&-6&&\\0&0&-2&&13&\vdots&\vdots\\0&1&0&&-6&\vdots&\vdots\\1&3&-6&&25&&\end{bmatrix}$$

$$\mu_1=3,\mu_2=1$$

前四个线性无关列为1, 2, 3, 5列，故μ_1=3， μ_2=1，

$$[\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2]^{-1} = \begin{bmatrix} 28 & 11 & -3 & 1 \\ 13 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

可求出$\mathbf{h}_1$=[2 1 0 0]， $\mathbf{h}_2$=[0 0 1 0]，从而可得

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_1\mathbf{A} \\ \mathbf{h}_1\mathbf{A}^2 \\ \mathbf{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

由 $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{P}_2\mathbf{A}\mathbf{P}_2^{-1}, \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{P}_2\mathbf{B}, \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\mathbf{P}_2^{-1}$

经计算，可得可控标准形：

$$\bar{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -11 & -6 & 0 \\ \hline -11 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right] \qquad \bar{B}=\left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 3 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \qquad \bar{C}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 多输出系统的可观标准形

类似地可建立多输出系统的可观标准形，这里省略。

3.多变量系统的三角标准形

若系统可控制，令其可控性矩阵为

$$\mathbf{U}=[\underbrace{\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\cdots\mathbf{b}_p}_{\mathbf{B}}\ \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{b}_1\ \mathbf{A}\mathbf{b}_2\cdots\mathbf{A}\mathbf{b}_p}_{\mathbf{AB}}\cdots\ \underbrace{\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_1\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_2\cdots\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_p}_{\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}}]$$

1）按以下方式构造 n 个线性无关列：

$\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1,\cdots,\ \mathbf{A}^{\bar{\mu}_1-1}\mathbf{b}_1$（直到$\mathbf{A}^{\bar{\mu}_1}\mathbf{b}_1$可由$\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1,\cdots,\ \mathbf{A}^{\bar{\mu}_1-1}\mathbf{b}_1$线性表出为止）；

$\mathbf{b}_2, \mathbf{A}\mathbf{b}_2,\cdots,\ \mathbf{A}^{\bar{\mu}_2-1}\mathbf{b}_2$（直到$\mathbf{A}^{\bar{\mu}_2}\mathbf{b}_2$可由$\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1,\cdots,\ \mathbf{A}^{\bar{\mu}_1-1}\mathbf{b}_1$;
$\mathbf{b}_2, \mathbf{A}\mathbf{b}_2,\cdots,\ \mathbf{A}^{\bar{\mu}_2-1}\mathbf{b}_2$线性表出为止）；

$\vdots$

2).取基底为

$$\mathbf{P}^{-1}=$$

$$[\underbrace{\mathbf{b}_1\ \mathbf{A}\mathbf{b}_1\cdots\mathbf{A}^{\bar{\mu}_1-1}\mathbf{b}_1}_{\bar{\mu}_1}\ \underbrace{\mathbf{b}_2\ \mathbf{A}\mathbf{b}_2\cdots\mathbf{A}^{\bar{\mu}_2-1}\mathbf{b}_2}_{\bar{\mu}_2}\cdots\underbrace{\mathbf{b}_p\ \mathbf{A}\mathbf{b}_p\cdots\mathbf{A}^{\bar{\mu}_p-1}\mathbf{b}_p}_{\bar{\mu}_p}]$$

定理3-6：设系统($\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$)可控，则存在等价变换将一其化为如下所示的三角标准形：

$$
\bar{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc:cccc:c:cccc}
0 & 0 & & \times & 0 & \cdots & 0 & \times & \cdots & 0 & 0 & 0 & \times \\
1 & & & \times & 0 & & 0 & \times & & 0 & 0 & 0 & \times \\
 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
 & & 1 & \times & 0 & \cdots & 0 & \times & & 0 & 0 & 0 & \times \\
\hdashline
 & & & & 0 & 0 & & \times & & 0 & 0 & \cdots & \times \\
 & \multicolumn{2}{c}{\Large 0} & & 1 & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & \times & \cdots & 0 & 0 & & \times \\
 & & & & & & 1 & \times & & 0 & 0 & & \times \\
\hdashline
 & \multicolumn{2}{c}{\Large 0} & & & \multicolumn{2}{c}{\Large 0} & & & & & & \\
 & & & & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\
\hdashline
 & & & & & & & & \cdots & 0 & 0 & & \times \\
 & & & & \multicolumn{2}{c}{\Large 0} & & & & 1 & & & \times \\
 & & & & & & & & & 0 & \ddots & & \vdots \\
 & & & & & & & & \cdots & & & 1 & \times
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\end{array}}\right\}\bar{\mu}_1 \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\end{array}}\right\}\bar{\mu}_2 \\
\quad\vdots \\
\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\end{array}}\right\}\bar{\mu}_p
\end{array}
$$

$$
\bar{\mathbf{B}}=\left[\begin{array}{cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
\cdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hdashline
0 & 1 & \cdots & 0 \\
\cdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
\hdashline
 & \vdots & & \vdots \\
\hdashline
0 & 0 & \cdots & 1 \\
\cdots & & & \\
0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\bar{\mu}_1 \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\bar{\mu}_2 \\
\vdots \\
\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\}\bar{\mu}_p
\end{array}
$$

在三角标准形中，基底的选取不排除如下可能性：

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \cdots, \ \mathbf{A}^{\bar{\mu}_1 - 1}\mathbf{b}_1, \bar{\mu}_1 = n.$$

此时$\bar{\mathbf{B}}$阵可能的形式是（以$p = 2$为例）：

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2] = \mathbf{P}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & \times \\ 0 & \times \\ 0 & \times \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \times \\ 0 & \times \end{bmatrix}$$

思考题：

1. 能否写出$Luenberger$ 可观标准形的形式及其变换矩阵的构造性方法？提示：假定$\mathbf{C}$是行满秩的，由可观测性矩阵

$$
\mathbf{V}_{n-1}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_q \\ \hdashline c_1\mathbf{A} \\ \vdots \\ c_q\mathbf{A} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline c_1\mathbf{A}^{n-1} \\ \vdots \\ c_q\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix}
$$

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_1\mathbf{A} \\ \vdots \\ c_1\mathbf{A}^{\nu_1-1} \\ \hdashline c_2 \\ \vdots \\ c_2\mathbf{A}^{\nu_2-1} \\ \hdashline \vdots \\ \hdashline c_q \\ \vdots \\ c_q\mathbf{A}^{\nu_q-1} \end{bmatrix}$$

$$P_1^{-1} = \begin{bmatrix} \times & q_1 & | \times & q_2 | & \cdots & | \times & q_q \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} q_1 & \mathbf{A}q_1 & \mathbf{A}^{\nu_1-1}q_1 & \cdots & q_q & \mathbf{A}q_q & \cdots & \mathbf{A}^{\nu_q-1}q_q \end{bmatrix}$$

思考题：

2．为什么假设**B** 阵列满秩不会失去一般性？为什么总假设 $p<n$ ？$p=n$ 会出现什么情况？$p>n$ 会出现什么样的情况？

单变量系统的实现

一、可控性、可观测性与零极点对消问题

考虑单变量系统，其动态方程为

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{b}u, \qquad y = \mathbf{c}x \qquad (3-22)$$

(3-22)式对应的传递函数为：

$$g(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{c} \cdot adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} = \frac{N(s)}{D(s)} \qquad (3-23)$$

其中，$N(s) = \mathbf{c} \cdot adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b}$

$D(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$

定理3-6 动态方程(3-22)可控、可观测的**充分必要条件**是$g(s)$ 无零、极点对消，即 $D(s)$和$N(s)$无非常数的公因式。

证明：首先用反证法证明条件的必要性。若有$s=s_0$既使$N(s_0)=0$，又使$D(s_0)=0$：

$$D(s_0)=\det(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})=0,$$

$$N(s_0)=\mathbf{c}\cdot adj(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b}=0$$

利用恒等式

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}=(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\frac{adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}=\mathbf{I}$$

$$\Rightarrow D(s)\mathbf{I} = (s\mathbf{I}-\mathbf{A})adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$$

将s= s_0代入，可得

$$\mathbf{A}adj(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A}) = s_0 adj(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A}) \qquad (1)$$

将上式左乘 c、右乘 b 后即有

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{A}adj(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b} = s_0\underbrace{\mathbf{c}\cdot adj(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b}}_{N(s_0)} = s_0 N(s_0) = 0 \qquad (2)$$

式(1)左乘cA、右乘b，并考虑到(2)的结果后即有

$$\mathbf{c}\mathbf{A}^2 adj(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b} = s_0\mathbf{c}\cdot\mathbf{A}adj(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b}$$

$$= s_0^2 N(s_0) = 0$$

……...，依次类推可得

$$N(s_0) = \mathbf{c} \cdot adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = 0$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{A} adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = 0$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}^2 adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = 0$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{A}^{n-1} adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = 0$$

这组式子又可写成

$$\begin{bmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{cA} \\ \vdots \\ \mathbf{cA}^{n-1} \end{bmatrix} adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = 0$$

因为假设系统可观测，其可观性矩阵是可逆矩阵，故

$$adj(s_0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{b} = 0$$

考虑到式(1-45)，我们有

$$adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b}=\Delta(s)(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}=\sum_{k=0}^{n-1}p_k(s)\mathbf{A}^k\mathbf{b}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_0(s)\\ p_1(s)\\ \vdots\\ p_{n-1}(s)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}p_0(s)\\ p_1(s)\\ \vdots\\ \vdots\\ p_{n-1}(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ & 1 & a_1 & \cdots & a_{n-2}\\ & & 1 & \ddots & \\ & & & \ddots & a_1\\ & 0 & & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s^{n-1}\\ s^{n-2}\\ \vdots\\ \\ s^0\end{bmatrix} \qquad (1-46)$$

由于$0=adj(s_0\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b}$

但 $p_{n-1}(s)\equiv 1$(式（1-46））$\Rightarrow \det\begin{bmatrix}\mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \cdots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}\end{bmatrix}=0$

这与系统可控的假设相矛盾。

矛盾表明$N(s)$和$D(s)$无相同因子，即$g(s)$不会出现零、极点相消的现象。

充分性： 即若$N(s)$和$D(s)$无相同因子，要证明动态方程

$$\dot{x}=\mathbf{A}x+\mathbf{b}u,\qquad y=\mathbf{c}x \qquad (3-22)$$

是可控、可观的。用反证法。设系统不是既可控又可观测的。不妨设系统是不可控的。这时可按可 控性分解为(2−36) 的形式，并且可知这时传递函数，

$$g(s)=\mathbf{c}\cdot(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}=\frac{\mathbf{c}\cdot adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b}}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}=\frac{N(s)}{D(s)}$$

$$=\mathbf{c}_1(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{b}_1=\frac{\mathbf{c}_1\cdot adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)\mathbf{b}_1}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)}=\frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

在上面的式子中，$D(s)$是n 次多项式，而$D_1(s)$是n_1次多项式，由于系统不可控，所以 $n_1 < n$，而$N(s)$和$D(s)$无相同因子可消去，显然

$$\frac{N(s)}{D(s)}\neq\frac{N_1(s)}{D_1(s)}$$

这和两者应相等矛盾。同样可以证明动态方程也不可能不可观测。

证完。

推 论

1）单输入系统(A, b)可控的**充分必要条件**是 $adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b}$与$D(\mathrm{s})=\boldsymbol{\Delta}(\mathrm{s})$无非常数公因式；

2）单输出系统(A, c)可观的**充分必要条件**是 $\mathbf{c}\,adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b}$与$D(\mathrm{s})=\boldsymbol{\Delta}(\mathrm{s})$无非常数公因式。

对SISO系统，我们有

$$Y(s)=\mathbf{c}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}u(s)=\frac{\mathbf{c}\,adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b}}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}u(s)$$

这里，$\Delta(s)=\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$

注、

- 若 $\mathbf{c}\,adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b}$与$\mathbf{A}$**的特征式**$\boldsymbol{\Delta}(s)$有公因子$s-s_0$，则$s_0$或是不可控模态，或是不可观模态，或是既不可控又不可观的模态；
- 若$adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b}$与$\boldsymbol{\Delta}(s)$有公因子$s-s_0$，则$s_0$是不可控模态
- 若$\mathbf{c}\,adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$与$\boldsymbol{\Delta}(s)$有公因子$s-s_0$，则$s_0$是不可观模态
- 即使$adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$与$\boldsymbol{\Delta}(s)$无零、极对消，也有可能$adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b}$与$\boldsymbol{\Delta}(s)$ 、 $\mathbf{c}\,adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$与$\boldsymbol{\Delta}(s)$都有零、极对消。

例题 1

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix},\quad \mathbf{c}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

不可控模态：1；

不可观模态：1；

$adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$与 $\boldsymbol{\Delta}(s)$ 有 $s=1$ 对消；

$adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b}$与$\boldsymbol{\Delta}(s)$有$s=1$ 对消；

$\mathbf{c}\,adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$与$\boldsymbol{\Delta}(s)$有$s=1$ 对消。

- $adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$与$\boldsymbol{\Delta}(s)$无零、极对消，也有可能有既不可控又不可观的模态。见下面的例2。

例题2

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 2 & & \\ & & 3 & \\ & & & 4\end{bmatrix},\mathbf{b}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\mathbf{c}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

不可控模态：3、4，$adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b}$ 与 $\boldsymbol{\Delta}(s)$可对消$(s-3)(s-4)$；

不可观模态：2、4，$\mathbf{c}\,adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$与 $\boldsymbol{\Delta}(s)$可对消$(s-2)(s-4)$；

既不可控又不可观的模态：4，（但 $adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$却与$\boldsymbol{\Delta}(s)$无对消！）。

作业：

P.113　　　3-3， 3-5,3-6证明定理3-4，