第 八讲

线性时不变系统状态空间实现

二、有理传递函数的最小实现

设给定有理函数

$$g_0(s)=\frac{d_0 s^n+d_1 s^{n-1}+\cdots+d_{n-1}s+d_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n} \quad (3-30)$$

式中的d_0就是下列动态方程中的直接传递部分

$$\dot{x}=\mathbf{A}x+\mathbf{b}u\,,\quad y=\mathbf{c}x+du$$

所以只需讨论(3-30)式中的严格真有理分式部分。

注意：(3-30)和讲义不同！

问题的提法是：给定严格真有理函数

$$g(s)=\frac{\beta_1 s^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}s+\beta_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n} \quad (3-32)$$

要求寻找（**A**, **b**, **c**），使得

$$\mathbf{c}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}=g(s) \quad (3-33)$$

并且在所有满足(3-33)式的（**A**, **b**, **c**）中，要求 **A** 的维数尽可能的小。**下面的讨论中总假定$g(s)$的分子和分母无非常数公因式。**

对(3-32)式，可构造出如下的实现 (**A** ,**b**,**c**)

1. 可控标准形的最小阶实现 (3-34)：

$$\mathbf{A_c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}_{n\times n} \qquad \mathbf{b}_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} \beta_n & \beta_{n-1} & \cdots & \beta_1 \end{bmatrix}$$

具体构造如下：

记(3 - 34)所对应的系统为

1)

$$y = g(s)[u] = \frac{N(s)}{D(s)}[u] = N(s)[v]$$

$$v = \frac{1}{D(s)}[u] = \frac{1}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}[u]$$

$$\Rightarrow v^{(n)} + a_1 v^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}v^{(1)} + a_n v = u$$

2)令

$$\begin{cases} x_1 = v \\ x_2 = \dot{x}_1 = \dot{v} \\ x_3 = \dot{x}_2 = v^{(2)} \\ \vdots \\ x_n = \dot{x}_{n-1} = v^{(n-1)} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = v^{(n)} = -a_n x_1 - a_{n-1}x_2 - \cdots - a_1 x_n + u \end{array}$$

写成向量形式：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} x+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \qquad (3-42)$$

3) $$y=N(s)[v]=(\beta_1 s^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}s+\beta_n)[v]$$

$$=\underbrace{[\beta_n \ \beta_{n-1} \cdots \beta_1]}_{c}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

(3-42)式给出的$(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$具有可控标准形，故一定是可控的。可直接计算它对应的传递函数就是(3-34)的传递函数。**由于已经假设$g(s)$无零、极点对消，故可知(3-42)式对应的动态方程也一定是可观的。**这时**A**阵的规模不可能再减小了，因为再减小就不可能得出传递函数的分母是n次多项式的结果。所以(3-42)式给出的就是(3-34)的**最小阶动态方程实现**。

2. 可观标准形的最小阶实现

$$g(s)=\frac{N(s)}{D(s)}=\frac{\beta_1 s^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}s+\beta_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

可以有如下可观标准形实现：

$$\mathbf{A_o}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix} \qquad (3-35)$$

$$\mathbf{c_o}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

对 $y=\dfrac{N(s)}{D(s)}[u]$,考虑所对应的微分方程:

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y^{(1)}+a_ny$$
$$=\beta_1u^{(n-1)}+\cdots+\beta_{n-1}u^{(1)}+\beta_nu \qquad (1)$$

根据拉氏变换的微分定理:

$$\mathcal{L}(y^{(i)})=s^iy(s)-s^{i-1}y(0)-\cdots-y^{(i-1)}(0);$$

$$\mathcal{L}(u^{(i)})=s^iu(s)-s^{i-1}u(0)-\cdots-u^{(i-1)}(0)$$

将它们代入(1)并经整理后有

$$y=(N(s)/D(s))[u]+\frac{1}{D(s)}\times$$

$$\times\{\underbrace{y(0)}_{x_n(0)}s^{n-1}$$

$$+\underbrace{[y^{(1)}(0)+a_1y(0)-\beta_1u(0)]}_{x_{n-1}(0)}s^{n-2}$$

$$+\underbrace{[y^{(2)}(0)+a_1y^{(1)}(0)-\beta_1u^{(1)}(0)+a_2y(0)-\beta_2u(0)]}_{x_{n-2}(0)}s^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$+\underbrace{[y^{(n-1)}(0)+a_1y^{(n-2)}(0)-\beta_1u^{(n-2)}(0)+\cdots a_{n-1}y(0)-\beta_{n-1}u(0)]}_{x_1(0)}\}$$

显然，若$s^{n-1},s^{n-2},\cdots,s^0$的系数已知，则对任何$u$,就可唯一地确定$y$。这启发我们选状态变量：

$$x_n = y$$

$$x_{n-1} = \underbrace{y^{(1)}}_{\dot{x}_n} + a_1 \underbrace{y}_{x_n} - \beta_1 u \Rightarrow \dot{x}_n = x_{n-1} - a_1 x_n + \beta_1 u$$

$$x_{n-2} = \underbrace{y^{(2)} + a_1 y^{(1)} - \beta_1 u^{(1)}}_{\dot{x}_{n-1}} + a_2 \underbrace{y}_{x_n} - \beta_2 u$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{n-1} = x_{n-2} - a_2 x_n + \beta_2 u$$

$$x_{n-3} = \underbrace{y^{(3)} + a_1 y^{(2)} - \beta_1 u^{(2)} + a_2 y^{(1)} - \beta_2 u^{(1)}}_{\dot{x}_{n-2}} + a_3 y - \beta_3 u$$

$$\Rightarrow \dot{x}_{n-2} = x_{n-3} - a_3 x_n + \beta_3 u$$

$$\vdots$$

$$x_1 = \underbrace{y^{(n-1)} + a_1 y^{(n-2)} - \beta_1 u^{(n-2)} + \cdots}_{\dot{x}_2} a_{n-1} \underbrace{y}_{x_n} - \beta_{n-1} u \quad (2)$$

$$\Rightarrow \dot{x}_2 = x_1 - a_{n-1} x_n + \beta_{n-1} u$$

最后求$\dot{x}_1$的表达式。事实上，由(2)，有

$$\dot{x}_1 = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y^{(1)} - \beta_{n-1} u^{(1)}$$

$$= y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y^{(1)} - (\beta_1 u^{(n-1)} + \cdots + \beta_{n-1} u^{(1)})$$

但由(1)：

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y^{(1)} + a_n y$$

$$= \beta_1 u^{(n-1)} + \cdots + \beta_{n-1} u^{(1)} + \beta_n u \qquad (1)$$

比较式(1)，我们有：

$$\dot{x}_1 = -a_n y + \beta_n u = -a_n x_n + \beta_n u$$

综上，$\dot{x}=\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \vdots\\ \dot{x}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -a_n\\ 1 & 0 & 0 & \cdots\cdots & -a_{n-1}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots\cdots & -a_{n-2}\\ 0 & 0 & 1 & \cdots\cdots & \vdots\\ \vdots & & & & \\ \vdots & & & \ddots & -a_2\\ 0 & & & \cdots\cdots 1 & -a_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\beta_n\\ \beta_{n-1}\\ \vdots\\ \beta_1\end{bmatrix}u$

$$y=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}x$$

$$\dot{x}_1=-a_n y+\beta_n u=-a_n x_n+\beta_n u$$

$$\dot{x}_2=x_1-a_{n-1}x_n+\beta_{n-1}u$$

$$\dot{x}_i=x_{i-1}-a_{n-i+1}x_n+\beta_{n-i+1}u$$

$$y=x_n$$

可控和可观标准型实现小结

1) 在传递函数为既约的条件下，无论是可控还是可观标准型均是最小实现；

2) $G(s)$实现为可控标准型 $(\mathbf{A}_c,\mathbf{b}_c,\mathbf{c}_c)$时，

$$\mathbf{A_c}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}_c=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c}_c=[\beta_n \ \beta_{n-1} \cdots \beta_1]$$

其中，a_n和 β_n分别是分母和分子多项式的常数项。

3) $\mathbf{G}(s)$的可观标准型$(\mathbf{A}_o,\mathbf{c}_o,\mathbf{b}_o)$：

$$\mathbf{A_o}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \end{bmatrix} \qquad (3-35)$$

$$\mathbf{c_o}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中， a_n 和 β_n分别是分母和分子多项式的常数项。

3. 若当标准形实现

若$g(s)$的因子已分解成一次因式的乘积，则通过部分分式分解，可得若当标准形的最小阶实现。

例：

$$\frac{y(s)}{u(s)}=g(s)=\frac{3s^3-12s^2+18s-10}{(s-1)^3(s-2)}$$

$$\Rightarrow y(s)=\frac{1}{(s-1)^3}u+\frac{-2}{(s-1)^2}u+\frac{1}{(s-1)}u+\frac{2}{(s-2)}u$$

令

$$x_1=\frac{1}{(s-1)^3}u \qquad x_2=\frac{1}{(s-1)^2}u$$

$$x_3=\frac{1}{(s-1)}u \qquad x_4=\frac{1}{(s-2)}u$$

因

$$y(s)=\frac{1}{(s-1)^3}u+\frac{-2}{(s-1)^2}u+\frac{1}{(s-1)}u+\frac{2}{(s-2)}u$$

则 $$y=\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & 2\end{bmatrix}x$$

但

$$x_1=\frac{1}{(s-1)^3}u=\frac{1}{(s-1)}x_2;$$

进而，$x_2=\dfrac{1}{(s-1)^2}u=\dfrac{1}{(s-1)}x_3 \Rightarrow x_3=\dfrac{1}{(s-1)}u$

最后，由$x_4=\dfrac{1}{(s-2)}u \Rightarrow \dot{x}_4=2x_4+u$。注意到

$$x_1=\frac{1}{(s-1)}x_2 \Rightarrow \dot{x}_1=x_1+x_2,$$

$$x_2=\frac{1}{(s-1)}x_1 \Rightarrow \dot{x}_2=x_2+x_3,$$

$x_3=\dfrac{1}{(s-1)}u \Rightarrow \dot{x}_3=x_3+u$，我们有

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 0\\ \hdashline & & & 2\end{array}\right]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}u,\ y=[1\ -2\ 1\ 2]x$$

多变量系统的实现

一、动态方程的可控性、可观测性与传递矩阵之间的关系

设多变量系统动态方程为

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$
$$y = \mathbf{C}x \qquad (3\text{-}36)$$

其传递函数矩阵为

$$\mathbf{G}(s) = \frac{\mathbf{C}adj(s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \qquad (3\text{-}37)$$

传递函数矩阵**G**(s)是一个严格真有理函数阵，即它的每一元素都是s的有理函数，且分母的阶次严格高于分子的阶次。

定理3－7：若$\Delta(s)$与$\mathbf{C}adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}$无非常数的公因式，则系统$(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$是可控和可观测的。

证明： 反证法。

若$(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C})$不可控或不可观测，则由结构分解定理，存在一个维数为$n_1<n$的系统$(\bar{\mathbf{A}},\bar{\mathbf{B}},\bar{\mathbf{C}})$，有

$$\mathbf{G}(s)=\frac{\mathbf{C}adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}=\frac{\bar{\mathbf{C}}adj(s\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}})\bar{\mathbf{B}}}{\det(s\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}})}$$

但$\det(s\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}})$的维数是$n_1$，上式成立意味$\Delta(s)$与

$$\mathbf{C}adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}$$

必发生公因式相消，矛盾。 证完。

本定理中的条件是系统可控可观测的**充分条件，而不是必要条件**。

例题3-4：设系统方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}u$$

显然系统可控且可观。但传递函数阵为

$$\mathbf{G}(s)=\frac{1}{(s-1)^2}\begin{bmatrix}s-1 & 0\\ 0 & s-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s-1} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{s-1}\end{bmatrix}$$

在A的特征式与 $\mathbf{C}adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}$ 之间存在公因式(s−1)。故定理中的条件不是必要的。

但如果将式:

$$\mathbf{G}(s)=\frac{\mathbf{C}adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})} \qquad (3\text{-}37)$$

的分母写成 **A** 的最小多项式，可以得到(**A**, **B**, **C**)可控可观的一个必要条件(略）。

在以下的讨论中，我们假定 $\mathbf{G}(s)$ 的每一个元都已经是既约形式，即每一个元的分子多项式和分母多项式没有非常数的公因式。

定义3-1： 一个有理传递矩阵 $\mathbf{G}(s)$ 称为是**正则**的，若 $\mathbf{G}(\infty)$ 是一个有限的常量矩阵。 $\mathbf{G}(s)$ 称为是**严格正则**的，若 $\mathbf{G}(\infty)=0$ 。

定义3-2 $\mathbf{G}(s)$的极点多项式中s 的最高次数称为$\mathbf{G}(s)$的麦克米伦($McMillan$)阶，用记号$\delta\mathbf{G}(s)$表示。

定义1−5*：$\mathbf{G}(s)$的所有不恒为零的各阶子式的首一最小公分母称为极点多项式。

例3-6： 求下列系统的$McMillan$阶：

$$\mathbf{G}_1(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix},\mathbf{G}_2(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+1} & \dfrac{1}{s+1}\\ \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

$\mathbf{G}_1(s)$的极点多项式为$(s+1)$; $\mathbf{G}_2(s)$的极点多项式为$(s+1)^2$，故

$$\delta\mathbf{G}_1(s)=1,\quad \delta\mathbf{G}_2(s)=2$$

例3-7：考虑

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{s}{(s+1)^2} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+3)} \\ \dfrac{-1}{s+1} & \dfrac{1}{(s+2)} & \dfrac{1}{s} \end{bmatrix}$$

容易算出极点多项式为

$$\phi(s)=s(s+1)^2(s+2)(s+3)\Rightarrow \delta\mathbf{G}(s)=5$$

注意：算极点多项式时各阶子式必须是互质的，例如该例中的第一个二阶子式。

定理3-8 系统(3-36) (**A**, **B**, **C**)可控可观测的**充分必要条件**是**G**(s)的极点多项式等于**A** 的特征多项式，即

$$\phi(s)=\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$$

证明：略。(使用定理3-8时，一般只要比较$\delta\mathbf{G}(s)$与$\det(s\mathbf{I}\text{-}\mathbf{A})$中 s 的最高次数是否相等就可以了)

直观说明：$\phi(s)=\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})$表示**A**的所有特征值均是传递函数的极点。由于传递函数只反映系统的可控、可观部分，这说明**A**的所有特征值既不是输入解耦零点，也不是输出解耦零点。

$$\mathbf{G}(s)=\frac{\mathbf{C}adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{B}}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})}$$

例3-8

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\\1&0\\0&-2\end{bmatrix}$$

$$C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{(sI\text{-}A)}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s}&0&\frac{1}{s(s+1)}&0\\0&\frac{1}{s}&0&\frac{1}{s(s+1)}\\0&0&\frac{1}{s+1}&0\\0&0&0&\frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

相应的传递矩阵为

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s(s+1)} & \dfrac{1}{s} \\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{s-1}{s(s+1)}\end{bmatrix}$$

A的特征多项式为

$$\Delta(s)=s^2(s+1)^2;$$

G(s)的极点多项式为

$$\phi(s)=s^2(s+1)^2$$

故系统是可控可观的。

二、向量传递函数的实现

一个元素为多项式的矩阵，总可以写成矩阵为系数的多项式，例如：

$$\begin{bmatrix} 2s^3+5s^2+3s & s^3+4s^2+6s+4 \\ s^2+6 & s+1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$$=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}s^3+\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}s^2+\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}s+\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

1. 行向量传递函数矩阵的可观标准形最小实现

例： 求下列传递矩阵的最小实现：

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s^2+3s+2}\end{bmatrix}$$

分析： 将两个元素的首一最小公分母提出，有

$$y=\mathbf{G}(s)u$$

$$=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\begin{bmatrix}(s+2) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}$$

这里，y是标量。因此，**c**阵是$1\times n$的，**B**阵是$n\times 2$的。

所以

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s^2+3s+2}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{(s+1)(s+2)}\{\underbrace{\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}}_{N_1}s+\underbrace{\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}}_{N_0}\}$$

$$\mathbf{A_o}=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{array}{cl}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\leftarrow N_0\\ \leftarrow N_1\end{array}\end{array}\qquad \mathbf{c_o}=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}$$

一般情形：考虑严格正则传递矩阵：

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix} \frac{n_1(s)}{d_1(s)} & \frac{n_2(s)}{d_2(s)} & \cdots & \frac{n_p(s)}{d_p(s)} \end{bmatrix}_{1\times p}$$

$$=\frac{1}{d(s)}\begin{bmatrix} \overline{n}_1(s) & \overline{n}_2(s) & \cdots & \overline{n}_p(s) \end{bmatrix}$$

这是一个**多入单出**系统，**其中各元均互质。**令

$$d(s)=s^n+a_1s^{n-1}+a_2s^{n-2}+\cdots+a_n$$

为G(s)各元分母多项式的首一最小公分母(**极点多项式**)，则上式可写成：

$$\frac{1}{d(s)}\{\underbrace{[\cdot \quad \cdots]}_{\mathbf{N}_{n-1}}s^{n-1}+\underbrace{[\cdot \quad \cdots]}_{\mathbf{N}_{n-2}}s^{n-2}+\cdots+\underbrace{[\cdot \quad \cdots]}_{\mathbf{N}_0}\}$$

其中$\mathbf{N}_i$均$1\times p$常向量(类比于单变量时的常数项）。

要注意到B阵的第一行是$\mathbf{N}_0$就可以了。

于是有实现：

$$\mathbf{A_o}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n\\ 1 & 0 & \cdots & & -a_{n-1}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{N}_0\\ \mathbf{N}_1\\ \vdots\\ \mathbf{N}_{n-1}\end{bmatrix}_{n\times p}\qquad (a-1)$$

$$\mathbf{c_o}=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix}$$

问题：

1) 这是原传递矩阵的实现吗？

2) 试将上式与单输入、单输出系统的可观测标准形实现相比较，有哪些相同和不同之处？

3）这是最小实现吗？

1）注意到公式（1-85）满足：

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A_c})^{-1}\mathbf{b_c}=\frac{1}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A_c})}\begin{bmatrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^{n-1}\end{bmatrix}$$

对偶地，我们有

$$\mathbf{c_o}(s\mathbf{I}-\mathbf{A_o})^{-1}=\frac{1}{\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A_o})}\begin{bmatrix}1 & s & \cdots & s^{n-1}\end{bmatrix}$$

容易验证，$\mathbf{c}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\mathbf{G}(s)$。

2）实现中$(\mathbf{A},\mathbf{c})$与单变量时的可观测标准形是完全一样的。

3）注意到在严格正则、各元互质时，$d(s)$既是系统的极点多项式，又是特征多项式，故由定理(3-8)，$(\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{c})$必是最小实现。

例：

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{2s+3}{(s+1)^2(s+2)} & \dfrac{s^2+2s+2}{s(s+1)^3}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\overbrace{\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}}^{\mathbf{N}_3}s^3+\overbrace{\begin{bmatrix}5 & 4\end{bmatrix}}^{\mathbf{N}_2}s^2+\overbrace{\begin{bmatrix}3 & 6\end{bmatrix}}^{\mathbf{N}_1}s+\overbrace{\begin{bmatrix}0 & 4\end{bmatrix}}^{\mathbf{N}_0}}{s(s+1)^3(s+2)=s^5+5s^4+9s^3+7s^2+2s}$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&-2\\0&1&0&0&-7\\0&0&1&0&-9\\0&0&0&1&-5\end{bmatrix}\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0&4\\3&6\\5&4\\2&1\\0&0\end{bmatrix}\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$\longleftarrow N_4=0$

2. 列向量传递函数矩阵的可控标准形最小实现

例： 考虑如下单入多出系统：

$$\begin{bmatrix} \dfrac{2s}{(s+1)(s+2)(s+3)} \\ \dfrac{s^2+2s+2}{s(s+1)(s+4)} \end{bmatrix}$$

$d(s)$为G(s)各元分母多项式的首一最小公分母(**极点多项式**）

$$= \frac{\overset{\mathbf{N}_4}{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}} s^4 + \overset{\mathbf{N}_3}{\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}} s^3 + \overset{\mathbf{N}_2}{\begin{bmatrix} 8 \\ 18 \end{bmatrix}} s^2 + \overset{\mathbf{N}_1}{\begin{bmatrix} 0 \\ 22 \end{bmatrix}} s + \overset{\mathbf{N}_0}{\begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}}}{d(s) = s^5 + 10s^4 + 35s^3 + 50s^2 + 24s}$$

$$\mathbf{A_c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -24 & -50 & -35 & -10 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 & 2 & 0 \\ 12 & 22 & 18 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

注意： 因为$\mathbf{G}(s)$的诸元素已是既约形式，故行分母（列分母）的次数就是$McMillan$阶，所构造的实现一定是最小实现。这点和标量传函一样。

一般地，考虑传递矩阵：

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{n_1(s)}{d_1(s)}\\[2ex] \dfrac{n_2(s)}{d_2(s)}\\ \vdots \\ \dfrac{n_p(s)}{d_p(s)}\end{bmatrix}_{q\times 1}=\frac{1}{d(s)}\left(\underbrace{\begin{bmatrix}\vdots\\ \vdots\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_{n-1}}s^{n-1}+\underbrace{\begin{bmatrix}\vdots\\ \vdots\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_{n-2}}s^{n-2}+\cdots+\underbrace{\begin{bmatrix}\vdots\\ \vdots\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_{1}}s^{1}+\underbrace{\begin{bmatrix}\vdots\\ \vdots\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_{0}}\right)$$

注意顺序！

$\mathbf{N}_i$均$q\times 1$列向量（类比于单变量时的常数项）。

这是一个单入多出系统，可实现为可控标准形：

$$
\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\mathbf{C}=\begin{bmatrix} \mathbf{N}_0 & \mathbf{N}_1 & \cdots & \mathbf{N}_{n-1} \end{bmatrix}_{q\times n}
$$

问题：

1) 这是原传递矩阵的实现吗？

2) 试将上式与单输入、单输出系统的可控标准形实现相比较.

3) 这是最小实现吗？

传递矩阵为列和行向量时的最小实现

1. 在各元素既约的条件下，它们的首一最小公分母就是$\mathbf{G}(s)$特征多项式;
2. $\mathbf{G}(s)$为列向量(**输入为标量**）则可实现为可控标准型$(\mathbf{A}_c,\mathbf{b}_c,\mathbf{C})$;
3. $\mathbf{G}(s)$为行向量（**输出为标量**）则可实现为可观标准型$(\mathbf{A}_o,\mathbf{c}_o,\mathbf{B})$;
4. 上述实现均是最小实现。

三、传递函数矩阵G(s)的实现

1. 按列展开：

可以将矩阵$\mathbf{G}(s)$分成列(行)，按列(行) 展开。以2列为例说明列展开时的做法。设第i列展开所得的可控形实现为$\mathbf{A}_i, \mathbf{b}_i, \mathbf{C}_i$，可按以下方式形成$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{d_1(s)}\mathbf{N}_1(s) & \dfrac{1}{d_2(s)}\mathbf{N}_2(s)\end{bmatrix}_{q\times 2}$$

其中：$d_i(s)=s^{n_i}+a^i_{n_i-1}s^{n_i-1}+a^i_{n_i-2}s^{n_i-2}+\cdots+a^i_0$

!

$$N_i(s)=\underbrace{\begin{bmatrix}\vdots\\ \vdots\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}^i_{n_i-1}}s^{n_i-1}+\underbrace{\begin{bmatrix}\vdots\\ \vdots\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}^i_{n_i-2}}s^{n_i-2}+\cdots+\underbrace{\begin{bmatrix}\vdots\\ \vdots\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}^i_1}s^1+\underbrace{\begin{bmatrix}\vdots\\ \vdots\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}^i_0}$$

$q\times 1$

向量

则有

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & 0\\ 0 & \mathbf{A}_2\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & 0\\ 0 & \mathbf{b}_2\end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\end{bmatrix}$$

其中，（$\mathbf{A}_1$，$\mathbf{b}_1$）、（$\mathbf{A}_2,\mathbf{b}_2$）均可控标准形，

$\mathbf{C}_1$、$\mathbf{C}_2$均具有形式：

$$\mathbf{A}_i=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & & 1 & & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ -a_0^i & -a_1^i & -a_2^i & \cdots & -a_{n^i-1}^i\end{bmatrix},\mathbf{b}_i=\begin{bmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{bmatrix}u \quad \mathbf{C}_i=\begin{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}\vdots\\ \vdots\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_0^i} & \underbrace{\begin{bmatrix}\vdots\\ \vdots\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_1^i} & \cdots & \underbrace{\begin{bmatrix}\vdots\\ \vdots\end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_{n_i-1}^i}\end{bmatrix}$$

这一实现是可控的（PBH检验），并可计算出上述实现的传函阵为

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (s\mathbf{I}-\mathbf{A}_2)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1} & \mathbf{C}_2(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_2)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{b}_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1}b_1 & \mathbf{C}_2(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{b}_2\end{bmatrix}$$

- **传递矩阵按列展开的步骤：**

1）将传递矩阵写成：

$$\mathbf{G}(s)=\left[\frac{1}{d_1(s)}\mathbf{N}_1(s)\cdots\quad \frac{1}{d_i(s)}\mathbf{N}_i(s)\cdots\frac{1}{d_p(s)}\mathbf{N}_p(s)\right]$$

2）把$\dfrac{1}{d_i(s)}\mathbf{N}_i(s)$实现为$(\mathbf{A}_i,\mathbf{b}_i,\mathbf{C}_i)$，其中，

$(\mathbf{A}_i,\mathbf{b}_i)$为可控标准形；

3) 构造系统的(**A**, **B**, **C**)（由PBH检验可知系统可控):

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A}_p\end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{b}_p\end{bmatrix},\mathbf{C}=[\mathbf{C}_1\ \mathbf{C}_2\ \cdots\mathbf{C}_p]$$

2. 按行展开

同理，可以将G(s)分成行，每行按行分母展开。以2行为例说明行展开时的做法,设第i行展开所得的可观形实现为$\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{c}_i$，可按以下方式形成**A**, **B**, **C**,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{c}_2 \end{bmatrix}$$

这一实现是可观的（由PBH检验可知），并可计算出上述实现的传函阵为$\mathbf{G}(s)$

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{c}_2 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} (s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (s\mathbf{I}-\mathbf{A}_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1} & 0 \\ 0 & \mathbf{c}_2(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_1)^{-1}\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{c}_2(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_2)^{-1}\mathbf{B}_2 \end{bmatrix}$$

▪ 传递矩阵按行展开的步骤：

1）将传递矩阵写成：

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{d_1(s)}\mathbf{N}_1(s) \\ \vdots \\ \dfrac{1}{d_i(s)}\mathbf{N}_i(s) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

2）把$\dfrac{1}{d_i(s)}N_i(s)$实现为$(\mathbf{A}_i,\mathbf{B}_i,\mathbf{c}_i)$,其中,

$(\mathbf{A}_i,\mathbf{c}_i)$为可观标准形;

3）构造系统的$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{A}_q \end{bmatrix},\mathbf{B}=\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \\ \mathbf{B}_q \end{bmatrix},\mathbf{C}=\begin{bmatrix} \mathbf{c}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{c}_q \end{bmatrix}$$

例题：给定有理函数阵为

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+3} \\ \dfrac{-1}{s+1} & \dfrac{-1}{s+2} \end{bmatrix}$$

试用行展开和列展开构造**G**(s)实现。

解　采用行展开方法，将**G**(s)写成

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}}{(s+1)(s+3)} \\ \dfrac{\begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

第一个子系统

第二个子系统

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix}}{(s+1)(s+3)}\\ \dfrac{\begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix}}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}$$

$$d_1(s)=s^2+4s+3,\quad d_2(s)=s^2+3s+2,$$

$$\longrightarrow \mathbf{N}_0^1=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix},\quad \mathbf{N}_1^1=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_0^2=\begin{bmatrix}-2 & -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{N}_1^2=\begin{bmatrix}-1 & -1\end{bmatrix}$$

按(3-38)式,可得可观性实现如下

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc:cc}0 & -3 & & \\ 1 & -4 & & \\ \hdashline & & 0 & -2\\ & & 1 & -3\end{array}\right],\quad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{cc}3 & 1\\ 1 & 1\\ \hdashline -2 & -1\\ -1 & -1\end{array}\right]\longleftarrow,\quad \mathbf{C}=\left[\begin{array}{cc:cc}0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

容易验证这一实现是可观的但不是可控的。**直接计算可知**$\delta G(s)=3$，而**A**阵的维数是4，由定理3-13可知，该实现一定不可控。要得到可控可观的实现，可以用定理2-17对此四阶实现进行可控性分解，进而得到一个三阶的实现。

但如果用列展开方法，就可以得到可控可观的实现，做法如下：将**G**(s)写成

$$\mathbf{G}(s)=\left[\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\quad \frac{1}{(s+2)(s+3)}\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}2\\-3\end{bmatrix}\right)\right]$$

$$d_1(s)=s+1 \qquad d_2(s)=s^2+5s+6$$

$$\mathbf{N}_0^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_0^2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N}_1^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

由(3-42)式可构成如下的实现

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c:cc} -1 & & \\ \hdashline & 0 & 1 \\ & -6 & -5 \end{array}\right], \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c:c} 1 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{C} = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \end{array}\right]$$

这是可控性实现，它也是可观的，因而是**G(s)**的最小阶实现。显然，在本例中一开始就应选择列展开方法。这是因为各列分母次数之和为3，小于各行分母次数之和4。

如果不论行展开或列展开都不能得到最小阶实现，可以利用可控性分解或可观性分解进一步降低系统的阶次。

例题：给定有理函数矩阵如下

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{s^2+1}{s^3} & \dfrac{2s+1}{s^2} \\ \dfrac{s-1}{s^2} & 0 \end{bmatrix}$$

求出$\mathbf{G}(s)$的最小阶动态方程实现。

解:　各一阶子式的公分母显然是s^3，而其一个二阶子式的分母为s^4，因而其极点多项式为s^4.

(1)　计算　$\delta\ \mathbf{G}(s)=4$

(2)　行展开

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{[1\quad 2]s^2+[0\quad 1]s+[1\quad 0]}{s^3}\\ \dfrac{[1\quad 0]s+[-1\quad 0]}{s^2}\end{bmatrix}$$

构成可观性实现：(一定不可控)

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{ccc|cc}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\\hline 0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{array}\right]_{5\times5}\qquad \mathbf{B}=\left[\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\1&2\\\hline -1&0\\1&0\end{array}\right]\qquad \mathbf{C}=\left[\begin{array}{ccc|cc}0&0&1&0&0\\\hline 0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

(3)　进行可控分解,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \mathbf{A}^2\mathbf{B} & \mathbf{A}^3\mathbf{B} & \mathbf{A}^4\mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & & \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & & \end{bmatrix}$$

可控性阵秩为4，可取前四列, 且作列变换，这样将使计算简便 {4列乘−1、 −2加到1、2列；2列乘−1加到3列), 3列加到1列, 3列乘−1},

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

再补充一列(后一列是补充的)，使下列矩阵为非奇异阵，记为

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{PAP}^{-1}=\left(\begin{array}{cccc:c}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1\\-1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\ \hdashline 0&0&0&0&0\end{array}\right)\quad \mathbf{PB}=\left(\begin{array}{cc}1&0\\0&1\\1&0\\1&2\\ \hdashline 0&0\end{array}\right)\quad \mathbf{CP}^{-1}=\left(\begin{array}{cccc:c}0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\end{array}\right)$$

(4)　可得最小实现为

$$\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\1&2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

(5)　验算, 可验证可控，可观且传递函数矩阵为

$$(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1} = \begin{pmatrix} s & & & \\ -1 & s & & \\ 1 & & s & \\ & -1 & & s \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s} & & & \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} & & \\ \frac{-1}{s^2} & & \frac{1}{s} & \\ \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^2} & & \frac{1}{s} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^3} & \frac{1}{s^2} & 0 & \frac{1}{s} \\ \frac{-1}{s^2} & 0 & \frac{1}{s} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{s^3}+\frac{1}{s} & \frac{1}{s^2}+\frac{2}{s} \\ \frac{-1}{s^2}+\frac{1}{s} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{s^2+1}{s^3} & \frac{2s+1}{s^2} \\ \frac{s-1}{s^2} & 0 \end{pmatrix}$$

3. 传递矩阵的一种最小实现

定理3-10：若$q\times p$矩阵可以写成下列形式：

$$\mathbf{G}(s)=\sum_{i=1}^{r}\frac{1}{(s-\lambda_i)}\mathbf{R}_i$$

其中，λ_i互不相同，$\mathbf{R}_i$为$q\times p$常数矩阵。则我们有

$$\delta\mathbf{G}(s)=\sum_{i=1}^{r}rank\mathbf{R}_i$$

证明：令$rank\mathbf{R}_i=n_i$。将$\mathbf{R}_i$进行满秩分解，即

$$\mathbf{R}_i=\mathbf{C}_i\times\mathbf{B}_i\quad(rank\mathbf{C}_i=n_i\text{、}rank\mathbf{B}_i=n_i),$$

其中，$\mathbf{C}_i$和$\mathbf{B}_i$分别为$q\times n_i$、$n_i\times p$阵。

注意到$\dfrac{1}{(s-\lambda_i)}\mathbf{R}_i=\dfrac{1}{(s-\lambda_i)}\mathbf{C}_i\mathbf{B}_i$恰可构成一最小实现:

$$\mathbf{G}_i(s):=\frac{1}{(s-\lambda_i)}\mathbf{C}_i\mathbf{B}_i=\mathbf{C}_i(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_i)^{-1}\mathbf{B}_i$$

这里,

$$\mathbf{A}_i=\begin{bmatrix}\lambda_i & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i\end{bmatrix}_{n_i\times n_i}\Rightarrow(s\mathbf{I}-\mathbf{A}_i)^{-1}=\frac{1}{(s-\lambda_i)}\mathbf{I}_{n_i}$$

利用PBH检验,其最小实现的结论为显然。

再用直和方式构成：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & & & \\ & \mathbf{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{A}_r\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{B}_2\\ \vdots\\ \mathbf{B}_r\end{bmatrix}\quad \lambda_i\text{互不相同}$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 & \cdots & \mathbf{C}_r\end{bmatrix}$$

根据若当形判据(PBH)容易证明此时(**A**,**B**,**C**)是最小实现，其维数为$\sum_{i=1}^{r} rank\mathbf{R}_i$。显然，

$$\delta\mathbf{G}(s)=\sum_{i=1}^{r} rank\mathbf{R}_i$$

证完。

例题

$$\mathbf{G}(s)=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s(s+1)} & \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+2}\\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+3} & \dfrac{1}{s+4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+2}\\ \dfrac{1}{s} & \dfrac{1}{s+3} & \dfrac{1}{s+4}\end{bmatrix}$$

$\downarrow \mathbf{R}_1$ $\downarrow \mathbf{R}_2$ $\downarrow \mathbf{R}_3$

$$=\frac{1}{s}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{s+2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{s+3}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}+\frac{1}{s+4}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$\uparrow \mathbf{R}_4$ $\uparrow \mathbf{R}_5$

$$=\frac{1}{s}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}_{\mathbf{C}_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}_{\mathbf{B}_1}+\frac{1}{s+1}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}_{\mathbf{C}_2}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\end{bmatrix}_{\mathbf{B}_2}+\frac{1}{s+2}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}_{\mathbf{C}_3}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{\mathbf{B}_3}$$

$$+\frac{1}{s+3}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}_{\mathbf{C}_4}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}_{\mathbf{B}_4}+\frac{1}{s+4}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}_{\mathbf{C}_5}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}_{\mathbf{B}_5}$$

G(s) 的一个最小实现为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -2 & & \\ & & & -3 & \\ & & & & -4 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \end{array} \end{array}$$

$$\mathbf{C} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & C_5 \end{array} \end{array}$$

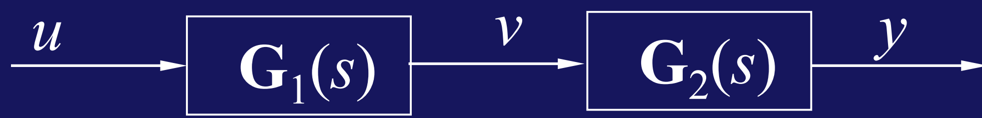
思考题

$$G(s)=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{s+1} & \dfrac{1}{s+3} \\ \dfrac{-1}{s+1} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

G(s) 可否由定理3-10求其一最小实现？

四、组合系统的状态空间实现

1. 串联方式：



传递函数为 $y=\mathbf{G}_2(s)\mathbf{G}_1(s)u$

令$\mathbf{G}_1$、$\mathbf{G}_2$的实现分别为

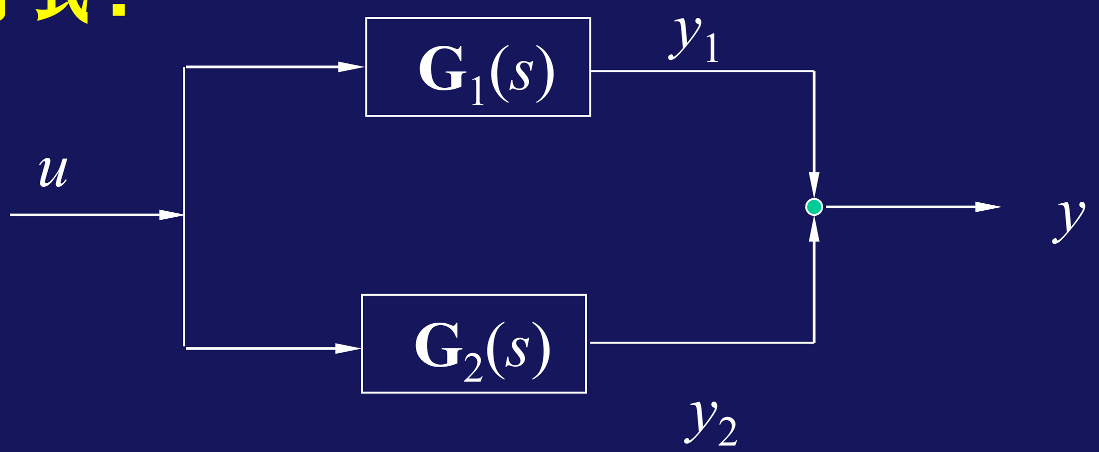
$$\dot{x}_1=\mathbf{A}_1x_1+\mathbf{B}_1u,\quad v=\mathbf{C}_1x_1$$

$$\dot{x}_2=\mathbf{A}_2x_2+\mathbf{B}_2v=\mathbf{A}_2x_2+\mathbf{B}_2\mathbf{C}_1x_1,\quad y=\mathbf{C}_2x_2$$

故组合系统$\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1$的动态方程为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & 0\\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{B}_1\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{C}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

2. 并联方式：



$$y = y_1 + y_2 = [\mathbf{G}_1(s) + \mathbf{G}_2(s)]u$$

令$\mathbf{G}_1$、$\mathbf{G}_2$的实现分别为

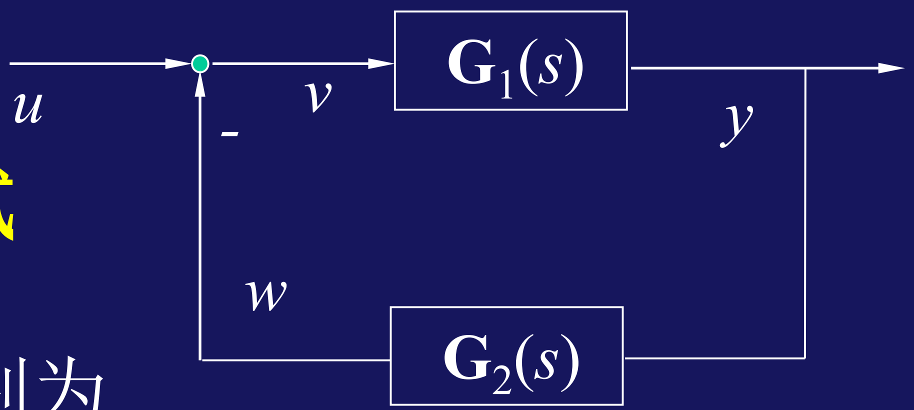
$$\dot{x}_1 = \mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{B}_1 u, \quad y_1 = \mathbf{C}_1 x_1$$

$$\dot{x}_2 = \mathbf{A}_2 x_2 + \mathbf{B}_2 u, \quad y_2 = \mathbf{C}_2 x_2$$

故$\mathbf{G}_1$+$\mathbf{G}_2$的动态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \end{bmatrix} u \qquad y = [\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

3. 反馈结构：



1)状态空间表达形式

令$\mathbf{G}_1$、$\mathbf{G}_2$的实现分别为

$$\dot{x}_1 = \mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{B}_1 v, \quad y = \mathbf{C}_1 x_1$$

$$\dot{x}_2 = \mathbf{A}_2 x_2 + \mathbf{B}_2 y, \quad w = \mathbf{C}_2 x_2, \quad v = u - w$$

$$\therefore \dot{x}_1 = \mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{B}_1 u - \mathbf{B}_1 w = \mathbf{A}_1 x_1 + \mathbf{B}_1 u - \mathbf{B}_1 C_2 x_2$$

$$\dot{x}_2 = \mathbf{A}_2 x_2 + \mathbf{B}_2 \mathbf{C}_1 x_1$$

反馈结构实现为

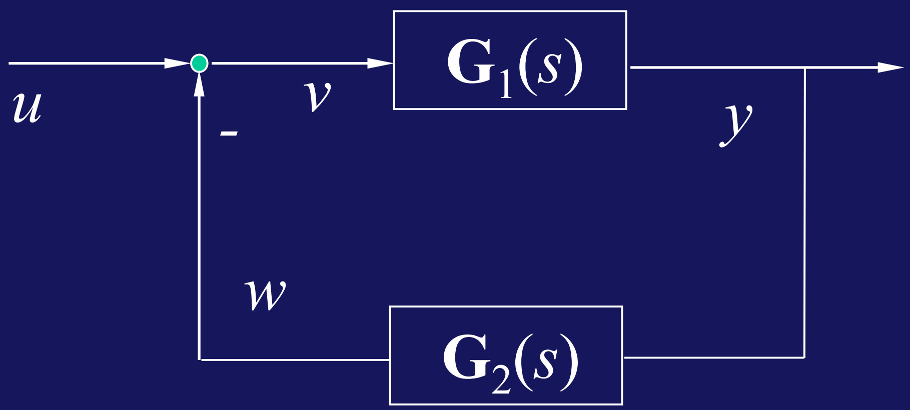
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & -\mathbf{B}_1\mathbf{C}_2 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} u \qquad y = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

2）传递函数矩阵表达形式：

$$y=(\mathbf{G}_1)_{q\times p}v \qquad (a)$$

$$w=(\mathbf{G}_2)_{p\times q}y \qquad (b)$$

$$v=u-\mathbf{G}_2 y \qquad (c)$$



（c）代入(a),得到

$$y=\mathbf{G}_1 u-\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2 y\Rightarrow(\mathbf{I}_q+\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2)y=\mathbf{G}_1 u$$

$$\Rightarrow y=(\mathbf{I}_q+\mathbf{G}_1\mathbf{G}_2)^{-1}\mathbf{G}_1 u$$

另一做法：(a)代入(c) 后有

$$v=u-\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1 v,\ v=(\mathbf{I}_p+\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1)^{-1}u$$

将上式代入(a)后有：$y=\mathbf{G}_1(\mathbf{I}_p+\mathbf{G}_2\mathbf{G}_1)^{-1}u$

需要注意：即使以上每个子系统都是最小实现，相应的组合系统也未必是最小实现。

作业 P114， 3-7， 3-8， 3-9，3-12，3-14， 3-15a，b.