第九讲

线性系统 状态反馈

一、状态反馈对系统可控性、可观测性的影响

1. 状态反馈不改变系统的可控性

系统的动态方程如下

$$\dot{x}=\mathbf{A}x+\mathbf{B}u, \quad y=\mathbf{C}x \qquad (4-1)$$

引入线性状态反馈控制律为

$$u=v+\mathbf{K}x \qquad (4-2)$$

式中的 v 是参考输入，K 称为状态反馈增益矩阵，这里它是 $p\times n$ 的矩阵。将(4-1)式和(4-2)式用方块图表示，见图4-1，它是一个闭环系统。

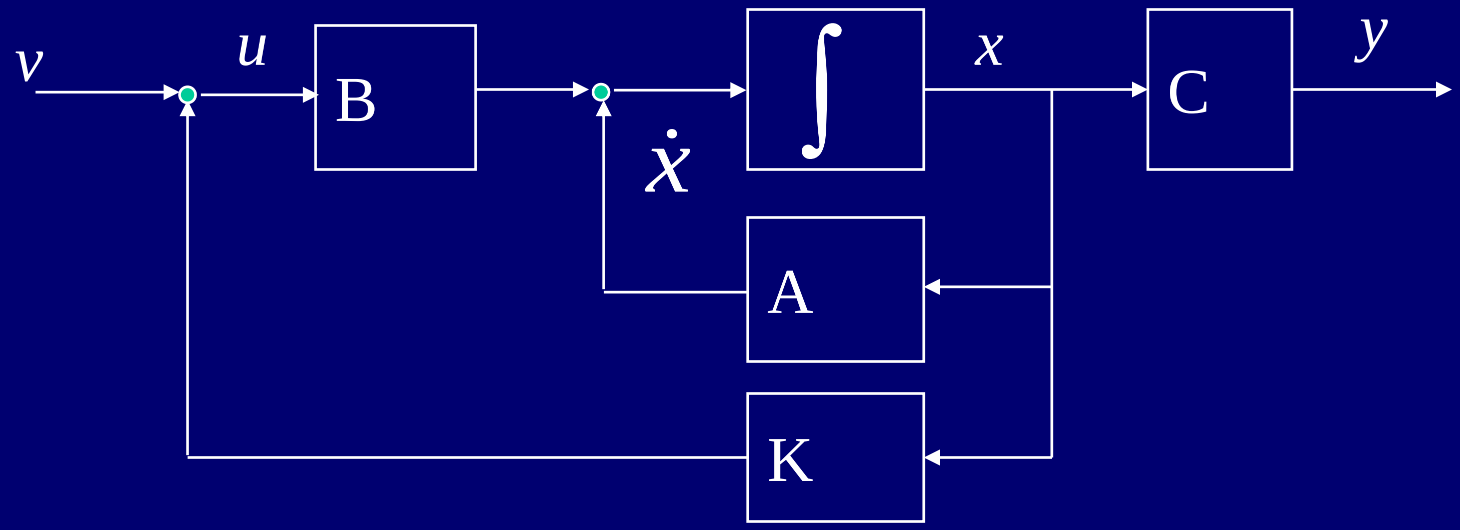


图4-1：闭环系统结构图

图4-1所示，引入状态反馈后的闭环系统的状态空间表达式为：

（将$u=v+\mathbf{K}x$代入状态方程后得到）

$$\dot{x}=\mathbf{A}x+\mathbf{B}u=(\mathbf{A}+\mathbf{BK})x+\mathbf{B}v$$

$$y=\mathbf{C}x \qquad (4-3)$$

式中A+BK为闭环系统的系数矩阵。

前： $\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u, \quad y = \mathbf{C}x \qquad (4-1)$

后： $\dot{x} = (\mathbf{A}+\mathbf{BK})x + \mathbf{B}v, \quad y = \mathbf{C}x \qquad (4-3)$

定理4-1： （4－3）可控 $\Leftrightarrow (4-1)$可控。

证明： 因为对$\forall \mathbf{K}$,

$$[\lambda\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK}) \quad \mathbf{B}] = [\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A} \quad \mathbf{B}]\begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & 0 \\ -\mathbf{K} & \mathbf{I}_p \end{bmatrix}$$

因此，$\forall \lambda, \mathbf{K}$,

$$rank[\lambda\mathbf{I}-(\mathbf{A}+\mathbf{BK}) \quad \mathbf{B}] = rank[\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A} \quad \mathbf{B}] \quad (4-4)$$

即状态反馈不影响可控性。 证完。

容易得到如下结论：

定理： 状态反馈不能改变不可控的模态，即开环的不可控模态在闭环中得到保持。

2. 状态反馈不改变可控子空间

定义状态反馈前的可控性矩阵为$\mathbf{U}_1$,即

$$\mathbf{U}_1=[\mathbf{B}\ \mathbf{AB}\cdots\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]\Rightarrow<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>=\mathrm{Im}\,\mathbf{U}_1$$

定义经状态反馈后的可控性矩阵为$\mathbf{U}_2$,即

$$\mathbf{U}_2=[\mathbf{B}\ (\mathbf{A+BK})\mathbf{B}\cdots(\mathbf{A+BK})^{n-1}\mathbf{B}]\Rightarrow<\mathbf{A+BK}\,|\,\mathbf{B}>=\mathrm{Im}\,\mathbf{U}_2$$

我们有如下结论:

定理4-2：状态反馈不改变可控子空间，即

$$\forall\mathbf{K},<\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}>(\mathrm{Im}\,\mathbf{U}_1)$$
$$=<\mathbf{A+BK}\,|\,\mathbf{B}>(\mathrm{Im}\,\mathbf{U}_2)$$

证明： 任取$x_0 \in <\mathbf{A}|\mathbf{B}>^{\perp} \Rightarrow x_0^T\mathbf{U}_1 = 0$，即

$$x_0^T\mathbf{A}^i\mathbf{B} = 0, i = 0,1,\cdots,n-1$$

$$\Rightarrow x_0^T(\mathbf{A+BK})^i\mathbf{B} = 0(\text{展开})$$

$$\Rightarrow x_0 \in <\mathbf{A+BK}|\mathbf{B}>^{\perp} \Rightarrow <\mathbf{A}|\mathbf{B}>^{\perp} \subset <\mathbf{A+BK}|\mathbf{B}>^{\perp}$$

同理，我们可以证明$<\mathbf{A}|\mathbf{B}>^{\perp} \supset <\mathbf{A+BK}|\mathbf{B}>^{\perp}$。

因此，我们有

$$<\mathbf{A}|\mathbf{B}> = <\mathbf{A+BK}|\mathbf{B}>,$$

即

$$\mathrm{Im}\,\mathbf{U}_1 = \mathrm{Im}\,\mathbf{U}_2。$$

证完。

3. 状态反馈却可能改变系统的可观测性。状态反馈是否改变系统的可观测性，要进行具体分析。

例题 系统的动态方程如下

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u, \quad y=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}x$$

开：$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}u, \quad y=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}x$

闭：$\dot{x}=(\mathbf{A}+\mathbf{bk})x+\mathbf{b}v, y=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}x$

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1 & 1\\k_1 & 1+k_2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}v, \; y=\begin{bmatrix}c_1 & c_2\end{bmatrix}x$$

下表列出了系统 c 阵参数、状态增益向量 k 和系统可观测性的关系。

c_1	c_2	k	原系统	闭环系统
0	1	[1 1]	不可观	可观
0	1	[0 1]	不可观	不可观
1	1	[2 1]	可观	不可观
1	1	[1 1]	可观	可观
1	0	任意	可观	可观

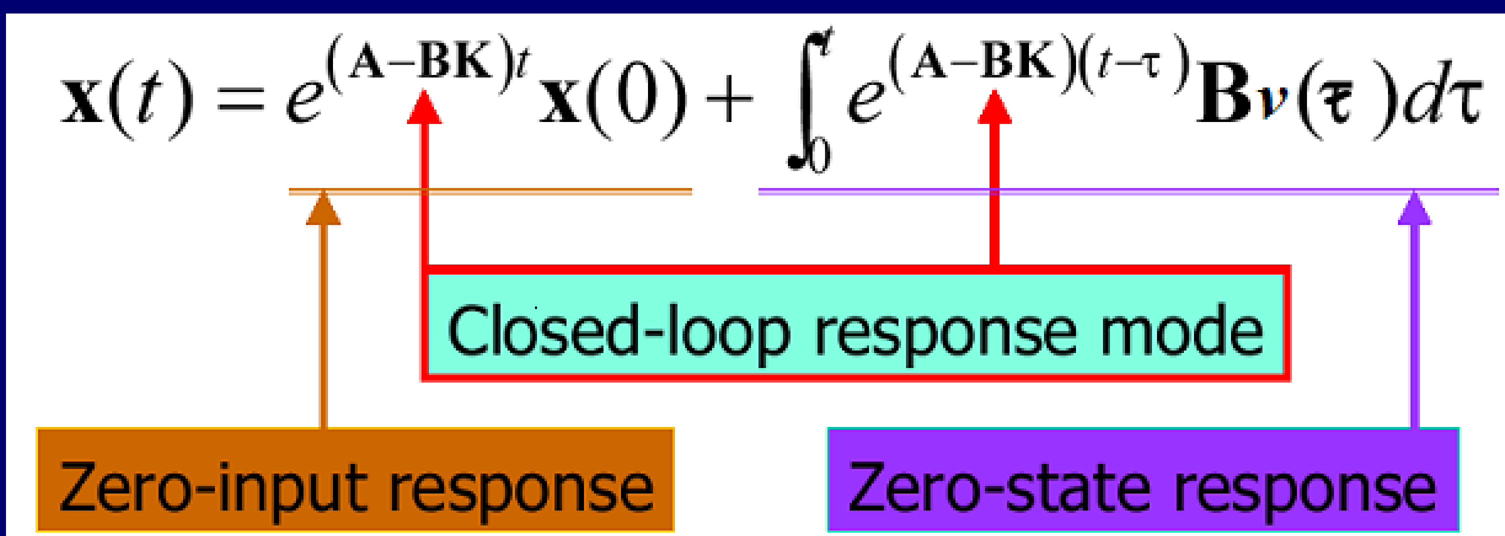
上例可观性的变化可以从闭环传递函数的极点变化、是否发生零极点对消来说明。

状态反馈和极点配置

问题的提法： 考虑开环系统

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u$$

并给定期望的闭环系统极点$\bar{\lambda}_1, \cdots, \bar{\lambda}_n$，它们或是实数，或是共轭复数。构造控制器$u = v - \mathbf{K}x$使得以这组给定的复平面上的点为闭环系统极点。



二、单变量系统的极点配置

开环： $\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{b}u$ （4－5）

引入状态反馈律： $u = v + \mathbf{k}x$ （4－6）

闭环： $\dot{x} = (\mathbf{A} + \mathbf{bk})x + \mathbf{b}v$ （4－7）

$$\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{n\times n}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^{n\times 1}, \mathbf{k} \in \mathbf{R}^{1\times n}$$

定理4-3 闭环系统(4-7) 的系数矩阵A+bk 的特征值可以由状态反馈增益阵 k 配置到复平面的任意位置（复数共轭成对），其充分必要条件是(4-5)式的系统可控。

必要性。若系统(4-5)可任意配置闭环特征值，要证明系统(4-5) 可控。用反证法，若系统(A,b)不可控，对其进行可控分解后有：

$$\bar{\mathbf{A}}+\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2\\ 0 & \mathbf{A}_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{\mathbf{k}}_1 & \bar{\mathbf{k}}_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_1+\mathbf{b}_1\bar{\mathbf{k}}_1 & \mathbf{A}_2+\mathbf{b}_1\bar{\mathbf{k}}_2\\ 0 & \mathbf{A}_4\end{bmatrix}$$

由上式可见，A_4的特征值不受 $\bar{\mathbf{k}}$ 的影响，即A+bk中的一部分特征值不受k 的影响，这与可任意配置A+bk的特征值相矛盾。

证明 充分性。充分性的证明是构造性的。分以下几步证明:

1) 因为(4-5)式的系统可控,则存在可逆矩阵P，将(4-5)式的系统通过 $\bar{x} = \mathbf{P}x$的变换化为可控标准形:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\mathbf{A}}\bar{x} + \bar{\mathbf{b}}\bar{u} \qquad y = \bar{\mathbf{c}}\bar{x}$$

式中，$\bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ & & & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}$ $\qquad \bar{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\bar{\mathbf{c}} = \begin{bmatrix} \beta_n & \beta_{n-1} & \cdots & \beta_1 \end{bmatrix}$$

这里,$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$

这时状态反馈律可写为

$$u = v + \mathbf{k}x = v + \mathbf{k}\mathbf{P}^{-1}\bar{x} = v + \bar{\mathbf{k}}\bar{x}$$

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{k}\mathbf{P}^{-1} \qquad 或 \qquad \mathbf{k} = \bar{\mathbf{k}}\mathbf{P}$$

由于

$$\det[s\mathbf{I} - (\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}})] = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{P}\mathbf{b}\mathbf{k}\mathbf{P}^{-1})]$$

$$= \det\{\mathbf{P}[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k})]\mathbf{P}^{-1}\} = \det[s\mathbf{I} - (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k})]$$

故 $\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}}$ 的特征式即是$\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}$的特征式，所以 $\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}}$和$\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{k}$有相同的特征值。

2）设期望的多项式为

$$(s - \lambda_1)(s - \lambda_2)\cdots(s - \lambda_n) = s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1}s + \bar{a}_n$$

其中λ_1、$\lambda_2, \cdots$，λ_n为期望的极点。

若取

$$\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} a_n - \bar{a}_n & a_{n-1} - \bar{a}_{n-1} & \cdots & a_2 - \bar{a}_2 & a_1 - \bar{a}_1 \end{bmatrix}$$

考虑矩阵

$$\bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -\bar{a}_n & -\bar{a}_{n-1} & \cdots & -\bar{a}_2 & -\bar{a}_1 \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}11)$$

(4-11)的特征式为（友矩阵的性质）

$$s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1} s + \bar{a}_n$$

故知(4-11)具有期望的特征值。但已证明:

$$\bar{\mathbf{A}}+\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}}$$与$\mathbf{A}+\mathbf{bk}$有相同的特征值

这说明任意给定闭环n个极点，均可确定k，使A+bk具有给定的n个特征值。

证完。

- 由充分性证明得到的求 k 阵的算法：

1)计算A的特征式

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A})=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n$$

2) 由所给的n 个期望特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，计算期望的多项式

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)=s^n+\bar{a}_1s^{n-1}+\cdots+\bar{a}_{n-1}s+\bar{a}_n$$

3) 求 $\bar{\mathbf{k}}$

$$\bar{\mathbf{k}}=\begin{bmatrix} a_n-\bar{a}_n & a_{n-1}-\bar{a}_{n-1} & \cdots & a_2-\bar{a}_2 & a_1-\bar{a}_1 \end{bmatrix}$$

4) 计算化可控标准形的坐标变换阵P;

5) 求出反馈增益阵 $\mathbf{k}=\bar{\mathbf{k}}\mathbf{P}$。

其中

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{hA} \\ \mathbf{hA}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{hA}^{n-1} \end{bmatrix},\mathbf{P}^{-1}=\begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ \vdots & \cdots & \iddots & \\ a_1 & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

其中h为可控性判别矩阵逆的最后一行。

- 如果不经过化可控标准型这步，也可直接求k:

1) 将k用$[k_1,k_2,\ldots,k_n]$ 表示;

2) 计算det$(s\mathrm{I}-\mathrm{A}-\mathrm{bk})$。这个$s$的多项式的系数包含了待定的$n$个参数：

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{bk}) = s^n + \beta_1(\mathbf{k})s^{n-1} + \beta_2(\mathbf{k})s^{n-2} + \cdots + \beta_n(\mathbf{k})$$

3) 将这个特征式与期望特征式比较，令s 的同次幂的系数相等:

$$(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n) = s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1}s + \bar{a}_n$$
$$= \det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{bk}) = s^n + \beta_1(\mathbf{k})s^{n-1} + \beta_2(\mathbf{k})s^{n-2} + \cdots + \beta_n(\mathbf{k})$$

有

$$\beta_1(\mathbf{k}) = \beta_1(k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n) = \bar{a}_1$$

$$\beta_2(\mathbf{k}) = \beta_2(k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n) = \bar{a}_2$$

$$\vdots$$

$$\beta_n(\mathbf{k}) = \beta_n(k_1 \quad k_2 \quad \cdots \quad k_n) = \bar{a}_n$$

得到包含n个未知量的n个（线性）方程，在系统可控的条件下，由这个方程可唯一地确定出k 。

此外，

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{bk}) = \det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) - \mathbf{k}\,adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b}$$

$$= s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n - \mathbf{kUG}\begin{bmatrix} s^{n-1} & s^{n-2} & \cdots & s^0 \end{bmatrix}^T$$

其中，**U**为可控性矩阵，常量阵$\mathbf{G}=$式（1–46）中的方阵。

令 $$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{bk}) = s^n + \bar{a}_1 s^{n-1} + \cdots + \bar{a}_{n-1}s + \bar{a}_n$$

则由上式，$$\mathbf{kUG} = \begin{bmatrix} a_1-\bar{a}_1 & a_2-\bar{a}_2 & \cdots & a_n-\bar{a}_n \end{bmatrix}$$

或

$$(\mathbf{UG})^T \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1-\bar{a}_1 \\ a_2-\bar{a}_2 \\ \vdots \\ a_n-\bar{a}_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{b} & \mathbf{Ab} & \ldots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} & \cdots & a_1 & 1 \\ \vdots & \cdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ a_1 & 1 & & \\ 1 & & & \end{bmatrix}$$

$$\det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{bk}) = \det(s\mathbf{I}-\mathbf{A}) - \mathbf{k}\,adj(s\mathbf{I}-\mathbf{A})\mathbf{b}$$

$$= s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n - \mathbf{kP}^{-1} \begin{bmatrix} s^0 & s^1 & \cdots & s^{n-1} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{kP}^{-1} = \begin{bmatrix} a_n-\bar{a}_n & \cdots & a_2-\bar{a}_2 & a_1-\bar{a}_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} a_n-\bar{a}_n & \cdots & a_2-\bar{a}_2 & a_1-\bar{a}_1 \end{bmatrix}\mathbf{P}$$

单输入系统

1) 当(A, b)可控时， n个方程是未知量k_i的**线性**方程；上述方程有解，且解**唯一**。对“**任意配置**”来说，有解的充要条件就是系统可控。

2) 可控条件对于任意配置极点是充分必要条件，但对于某一组指定的特征值进行配置时，系统可控只是充分条件，而不是必要条件。

推论：给定极点组可用状态反馈达到配置的充分必要条件是给定极点组包含系统的不可控模态。

事实上，假设系统是不可控的且已具有可控性分解：

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ 0 & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ 0\end{bmatrix}u$$

引入状态反馈$u=\mathbf{kx}+v$,有

$$\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ 0 & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ 0\end{bmatrix}\mathbf{k}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ 0 & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{b}_1\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{k}_1 & \mathbf{k}_2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11}+\mathbf{b}_1\mathbf{k}_1 & \mathbf{A}_{12}+\mathbf{b}_1\mathbf{k}_2\\ 0 & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}$$

显然，由于状态反馈不会改变系统的不可控模态，故仅当欲配置的极点包含A_{22}的全部特征值时才是可行的。

例题 系统动态方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}u \qquad y=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\end{bmatrix}x$$

给定两组极点，分别为:$\{-2, -3, -4\}$ 和 $\{-1, -2, -3\}$ ， 问哪组极点可用状态反馈进行配置。

解 计算出A阵的特征值，分别为 $-1, -0.5\pm j\,0.5\sqrt{3}$。可验证$-1$是不可控的，其它两个特征值是可控的。极点组$\{-1, -2, -3\}$包含了不可控模态 -1，所以可用状态反馈进行配置；极点组$\{-2,-3,-4\}$则不能达到配置。

现用直接求解方法研究。令$k=[k_1 \quad k_2 \quad k_3]$，

$$|s\mathbf{I}-(\mathbf{A}-\mathbf{bk})|=\begin{vmatrix} s+k_1 & k_2 & 1+k_3 \\ -1+k_1 & s+k_2 & 2+k_3 \\ 0 & -1 & s+2 \end{vmatrix}$$

$$=s^3+(k_1+k_2+2)s^2+(2k_1+3k_2+k_3+2)s+(1+k_1+2k_2+k_3)(*)$$

期望多项式

$$(s+1)\ (s+2)(s+3)=s^3+6s^2+11s+6$$

比较与(*)式的系数有

$$
\begin{aligned}
k_1 + k_2 + 2 &= 6 \\
2k_1 + 3k_2 + k_3 + 2 &= 11 \\
1 + k_1 + 2k_2 + k_3 &= 6
\end{aligned}
\qquad
\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{rank(\cdot)=2}
\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} \cdots (\nabla)
$$

上述方程，增广矩阵的秩等于系数矩阵的秩（等于2），有解。

方程组(∇)的相容条件就是**所给极点组应包含不可控模态。**

由此可见,“任意配置”要求系数矩阵满秩,系数矩阵满秩的条件是系统可控。

由 (∇) 可解出 k_1, k_2, k_3

$$k_1+k_2=4\ ,\quad k_3+k_2=1$$

$$s^3+(k_1+k_2+2)s^2+(2k_1+3k_2+k_3+2)s+1+k_1+2k_2+k_3 \qquad (*)$$

(*)式又可表成 $(s+1)[s^2+(k_1+k_2+1)s+k_1+k_3+2k_2+1]$

将二阶因式与$(s+2)(s+3)$相比较，可得同样结果。上式也表明不可控模态是用状态反馈改变不了的。

三、状态反馈对传递函数零点的影响

反馈前的系统

$$g(s)=\mathbf{c}(s\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{b}=\bar{\mathbf{c}}(s\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{b}}=\frac{\beta_1 s^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}s+\beta_n}{s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

这里，我们假定已经将（$\bar{\mathbf{A}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}$)化成了可控标准形。此时

$$(s\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}})^{-1}\bar{\mathbf{b}}=\frac{1}{\det(s\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}})}[1\ s\ s^2\cdots s^{n-1}]^T,$$

$$\bar{\mathbf{c}}=\begin{bmatrix}\beta_n & \beta_{n-1} & \cdots & \beta_1\end{bmatrix}。$$

用同样的变换，经反馈后的系统

$$g_f(s)=\mathbf{c}(s\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{bk})^{-1}\mathbf{b}=\bar{\mathbf{c}}(s\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}}-\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}})^{-1}\bar{\mathbf{b}}$$

$$= \bar{\mathbf{c}}\underbrace{(s\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}}-\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}})^{-1}}_{\text{仍为友矩阵的形式}}\bar{\mathbf{b}}$$

$$= \begin{bmatrix}\beta_n & \beta_{n-1} & \cdots & \beta_1\end{bmatrix}\frac{1}{\det(s\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}}-\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}})}\begin{bmatrix}1\\ s\\ \vdots\\ s^{n-1}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{\beta_1 s^{n-1}+\cdots+\beta_{n-1}s+\beta_n}{\det(s\mathbf{I}-\bar{\mathbf{A}}-\bar{\mathbf{b}}\bar{\mathbf{k}})}$$

结论：引入状态反馈可移动极点的位置，一般说来不影响零点。但却存在这样的情形：经状态反馈后的极点恰与零点有对消，此时状态反馈不仅影响了零点，还造成被消掉的极点为不可观测模态（但仍可控）。这从另一个角度解释了为什么状态反馈有时会使系统失去可观测性。

多变量系统状态反馈
极点配置

例子，考虑如下系统：

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{ccc:cc} 3 & 1 & 0 & & \\ 0 & 3 & 1 & & \\ 0 & 0 & 3 & & \\ \hdashline & & & 2 & 1 \\ & & & 0 & 2 \end{array}\right] \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}:=\mathbf{B}\rho=\mathbf{B}\begin{bmatrix}\rho_1 \\ \rho_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\times \\ \times \\ \beta \\ \times \\ \alpha\end{bmatrix}$$

Bρ如上所示，其中×表示的元讨论中无需用到。利用可控性的若当形判据知，（**A**, **B**ρ)为可控的充分必要条件是$\beta=2\rho_1+\rho_2\neq 0, \alpha=2\rho_1\neq 0$。这表明除$\rho_1/\rho_2=-0.5$和$\rho_1=0$以外的所有$\rho$，也即几乎任意的$\rho$,（**A**, **B**$\rho$)为可控。故一定存在$\rho$使得（**A**, **B**$\rho$)为可控。

多变量系统状态反馈

例子，考虑如下系统：

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{cc:c:cc} 3 & 1 & 0 & & \\ 0 & 3 & 0 & & \\ \hdashline 0 & 0 & 3 & & \\ \hdashline & & & 2 & 1 \\ & & & 0 & 2 \end{array}\right] \qquad \mathbf{B}=\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b}{:=}\mathbf{B}\rho=\mathbf{B}\begin{bmatrix}\rho_1 \\ \rho_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times\end{bmatrix}$$

循环矩阵

1. 循环矩阵的定义:

定义： $n\times n$方阵A称为是循环的，系指其最小多项式等于其特征多项式。**等价的提法有：**

1). sI–A的$Smith$标准形只有一个非1的不变因子；

2). A 的若当形中每个特征值只有一个若当块。

例： 考虑刚才的矩阵：

$$\mathbf{A}=\left[\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 0 & & \\ 0 & 3 & 1 & & \\ 0 & 0 & 3 & & \\ \hline & & & 2 & 1 \\ & & & 0 & 2 \end{array}\right]$$

A阵显然是循环的。

特别，我们有：

1）若**A**的所有特征值互异，故其若当标准形相应于每一个不同的特征值只有一个若当块，**A**为循环阵。

2) 若A为循环矩阵，则存在向量b (称为A 的生成元)，使

$$\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}^2\mathbf{b}, \cdots, \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{b}, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}$$

可张成一个n维空间，即（$\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$）可控。

因此,单输入系统 (A, b)可控的充分必要条件是：

A是循环的且b是A的生成元。

多变量系统极点配置基本思路：若多变量系统(A, B)可控，其极点配置的主要思路是要将其化为单变量系统的极点配置问题，步骤如下：

1. 任取

$$b \in \mathrm{Im}(B)\ ,\ b \neq 0,$$

找一个状态反馈增益阵K_1，使单变量系统

$$(A+BK_1,\ b)$$

可控；

2. 对单变量系统$(A+BK_1, b)$配置极点到希望的位置：

$$\underbrace{\mathbf{A}+\mathbf{BK}_1}_{\bar{\mathbf{A}}}+\mathbf{bk}$$

3. 由于

$$\mathbf{b} \in \mathrm{Im}\,\mathbf{B} \Leftrightarrow \exists\, \mathbf{L} \in \mathbf{R}^{p\times 1},$$

使得

$$\mathbf{b}=\mathbf{BL}$$

故由上式，有

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}+\mathbf{BK}_1+\mathbf{bk} \\ &= \mathbf{A}+\mathbf{BK}_1+\mathbf{BLk} = \mathbf{A}+\mathbf{B}\underbrace{(\mathbf{K}_1+\mathbf{Lk})}_{\mathbf{K}}. \end{aligned}$$

因此，找状态反馈增益阵K_1是关键。

定理4-4 若(A, B)可控，则对B值域中的任一非零向量b，均存在一个状态反馈增益阵K_1，使得

$$(A+BK_1, b)$$

可控，这里，$K_1 \in R^{p\times n}$。

证明分以下几步完成：

1) 利用如下结论：

引理： 若(A, B)可控，可选取n–1个向量u_1, u_2, …, u_{n-1}，使得由下式定义的n个向量x_1, x_2, …, x_n 线性无关：

$$
\begin{cases}
x_1 = \mathbf{b}, \\
x_2 = \mathbf{A}x_1 + \mathbf{B}u_1, \\
x_3 = \mathbf{A}x_2 + \mathbf{B}u_2 \\
\cdots \\
x_{n-1} = \mathbf{A}x_{n-2} + \mathbf{B}u_{n-2} \\
x_n = \mathbf{A}x_{n-1} + \mathbf{B}u_{n-1}
\end{cases}
$$

其中b 为B值域中的任一非零向量，$x_i \in \mathrm{R}^{n\times 1}$, $u_i \in \mathrm{R}^{p\times 1}$

2). 定义矩阵 $K_1 \in R^{p\times n}$：

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}_{n\times n}^{-1}$$

即：

$$\mathbf{K}_1 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} & 0 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

注意到

$$\begin{cases} u_1 = \mathbf{K}_1 x_1, \\ u_2 = \mathbf{K}_1 x_2, \\ \cdots \\ u_{n-1} = \mathbf{K}_1 x_{n-1} \\ \quad 0 = \mathbf{K}_1 x_n \end{cases}$$

3. 证明$(A+BK_1, b)$ 可控

易见

$$x_1 = \mathbf{b}$$

$$x_2 = \mathbf{A}x_1 + \mathbf{B}u_1 = \mathbf{A}x_1 + \mathbf{B}\mathbf{K}_1 x_1 = (\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1)\mathbf{b}$$

$$x_3 = \mathbf{A}x_2 + \mathbf{B}u_2 = \mathbf{A}x_2 + \mathbf{B}\mathbf{K}_1 x_2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1)x_2 = (\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1)^2\mathbf{b}$$

$$\vdots$$

$$x_{n-1} = \mathbf{A}x_{n-2} + \mathbf{B}u_{n-2} = (\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1)x_{n-2} = (\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1)^{n-2}\mathbf{b}$$

$$x_n = \mathbf{A}x_{n-1} + \mathbf{B}u_{n-1} = (\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1)x_{n-1} = (\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1)^{n-1}\mathbf{b}$$

因为$x_1, x_2, \cdots, x_n$线性无关，故

$$rank\left[\mathbf{b} \quad (\mathbf{A}+\mathbf{BK}_1)\mathbf{b} \quad (\mathbf{A}+\mathbf{BK}_1)^2\mathbf{b} \quad \cdots \quad (\mathbf{A}+\mathbf{BK}_1)^{n-1}\mathbf{b}\right] = n$$

$\Leftrightarrow (\mathbf{A}+\mathbf{BK}_1, \mathbf{b})$可控。

定理证**完。**

引理的证明： 这里给出一个构造性的证明。

不失一般性，假定B=[b_1, b_2,…., b_p]的各列线性无关。

1) 按以下方式构造n个线性无关列：

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \cdots, \ \mathbf{A}^{n_1-1}\mathbf{b}_1$$

（直到$\mathbf{A}^{n_1}\mathbf{b}_1$可由$\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \cdots, \ \mathbf{A}^{n_1-1}\mathbf{b}_1$线性表出为止）；

$$\mathbf{b}_2, \mathbf{A}\mathbf{b}_2, \cdots, \ \mathbf{A}^{n_2-1}\mathbf{b}_2$$

（直到$\mathbf{A}^{n_2}\mathbf{b}_2$可由$\mathbf{b}_1, \mathbf{A}\mathbf{b}_1, \cdots, \ \mathbf{A}^{n_2-1}\mathbf{b}_2$线性表出为止）；

依次类推，(A, B)可控意味总有

$$[\underbrace{\mathbf{b}_1\ \mathbf{Ab}_1 \cdots \mathbf{A}^{n_1-1}\mathbf{b}_1}_{n_1}\ \underbrace{\mathbf{b}_2\ \mathbf{Ab}_2 \cdots \mathbf{A}^{n_2-1}\mathbf{b}_2}_{n_2} \cdots \underbrace{\mathbf{b}_p\ \mathbf{Ab}_p \cdots \mathbf{A}^{n_p-1}\mathbf{b}_p}_{n_p}]$$

构成 n 维空间中的一组基，其中，$\sum n_i = n$。

注意：

- 有可能某个b_i可表示为它前面向量的线性组合，此时$\mathrm{A}^k\mathrm{b}_i$均不能选到。
- 这就是三角标准型选取基底的方法。

2）只要按以下方式构造 n 个线性无关的向量x_i 就可以了：

$$
\begin{cases}
\left.\begin{aligned}
& x_1 = \mathbf{b}_1, \\
& x_2 = \mathbf{A}x_1 + \mathbf{b}_1, \\
& \cdots, \\
& x_{n_1} = \mathbf{A}x_{n_1-1} + \mathbf{b}_1,
\end{aligned}\right\} n_1 \\
\left.\begin{aligned}
& x_{n_1+1} = \mathbf{A}x_{n_1} + \mathbf{b}_2 \\
& \cdots \\
& x_{n_1+n_2} = \mathbf{A}x_{n_1+n_2-1} + \mathbf{b}_2
\end{aligned}\right\} n_2 \\
\qquad\qquad \vdots \\
\vdots
\end{cases}
$$

易于证明$x_1 \sim x_n$是线性无关的。事实上，

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_{n_1} & , x_{n_1+1}, \cdots, x_{n_1+n_2}, \cdots, x_n \end{bmatrix}$$

$$= [\underbrace{\mathbf{b}_1, \mathbf{Ab}_1 + \mathbf{b}_1, \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1 + \mathbf{Ab}_1 + \mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{A}^{n_1-1}\mathbf{b}_1 + \cdots + \mathbf{Ab}_1 + \mathbf{b}_1}_{n_1\text{个}},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^{n_1-1}\mathbf{b}_1 + \cdots + \mathbf{Ab}_1 + \mathbf{b}_1) + \mathbf{b}_2 \cdots$$

$$\xrightarrow{\text{经列初等变换}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1, \mathbf{Ab}_1, \mathbf{A}^2\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{A}^{n_1-1}\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{Ab}_2, \mathbf{A}^2\mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{A}^{n_2-1}\mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_p \cdots, \mathbf{A}^{n_p-1}\mathbf{b}_p \end{bmatrix}}_{\text{原基底}}$$

3). 确定 u_i 。只要令

$$\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2=\cdots=\mathbf{u}_{n_1-1}=e_1=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^p$$

$$\mathbf{u}_{n_1}=\mathbf{u}_{n_1+2}=\cdots=\mathbf{u}_{n_1+n_2-1}=e_2=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^p$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{n_1+n_2+\cdots+n_{p-1}}&=\mathbf{u}_{n_1+n_2+\cdots+n_{p-1}+1}\\&=\cdots=\mathbf{u}_{n_1+n_2+\cdots+n_{p-1}+n_p-1}=e_p=\begin{bmatrix}0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^p\end{aligned}$$

就可以了。

证完。

注：引理的证明过程实际上给出了如何选取x_i和 u_i,使

$$\begin{cases} x_{i+1} = \mathbf{A}x_i + \mathbf{B}u_i, i = 1, 2, \cdots, n-1, \; x_1 := \mathbf{b}_1 = \mathbf{b} \\ \operatorname{span}\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} = \mathbb{R}^n \end{cases}$$

从而选取矩阵K_1的算法（更一般的构造性方法可参见2003年黄琳教授的“**稳定性与鲁棒性的理论基础**”$p.168$）：

K1按如下方法构造： 1.首先取 n 个线性无关列：

$$[\underbrace{\mathbf{b}_1\ \mathbf{A}\mathbf{b}_1 \cdots \mathbf{A}^{n_1-1}\mathbf{b}_1}_{n_1}\ \underbrace{\mathbf{b}_2\ \mathbf{A}\mathbf{b}_2 \cdots \mathbf{A}^{n_2-1}\mathbf{b}_2}_{n_2} \cdots \underbrace{\mathbf{b}_p\ \mathbf{A}\mathbf{b}_p \cdots \mathbf{A}^{n_p-1}\mathbf{b}_p}_{n_p}]$$

2. 按右边方式构造x_i：

$$\begin{cases} x_1 = \mathbf{b}_1, \\ x_2 = \mathbf{A}x_1 + \mathbf{b}_1, \\ \cdots, \\ x_{n_1} = \mathbf{A}x_{n_1-1} + \mathbf{b}_1, \\ x_{n_1+1} = \mathbf{A}x_{n_1} + \mathbf{b}_2 \\ \cdots \\ x_{n_1+n_2} = \mathbf{A}x_{n_1+n_2-1} + \mathbf{b}_2 \\ \vdots \end{cases}$$

3. 与b_1有关的项取：

$\mathrm{u}_1 = e_1$

……..

与b_i有关的项取

$\mathrm{u}_i = e_i\ (i=1,2,\ldots,p)$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}_{n\times n}^{-1}$$

定理4-5　若系统(4-1)可控，则存在状态反馈增益阵K，使得A+BK的n个特征值配置到复平面上n个任意给定的位置（复数共轭成对出现）。

证明　选取B值域空间中任一非零向量b可表示为b=BL，

由定理4-4可知存在K_1，使

$$(A+BK_1, b)$$

可控。由单变量极点配置定理可知存在n维行向量k，使得$A+BK_1+bk$的特征值可任意配置。

故只要取　$K= K_1+Lk$

即可证明定理4-5。

证完。

例题 1　　系统方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}u \qquad \mathbf{L}=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix}^T$$

试构造K_1，使$(A+BK_1, b=BL)$可控。

解（试凑法）取

$$x_1=\mathrm{BL}=\mathrm{b}=[0\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm{T}}\neq 0,\ \ \mathrm{L}=[1\ \ 1]^T。$$

考虑

$$x_1=\mathrm{b},\qquad x_{k+1}=\mathrm{A}\ x_k+\mathrm{B}\ u_k\ \ (k=1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n-1),$$

因为

$$\mathrm{A}x_1=[1\ \ 1\ \ 1]^{\mathrm{T}}$$

与x_1线性无关，故取

$$x_2=\mathrm{A}x_1,$$

也就是可令

$$u_1=[0\quad 0]^{\mathrm{T}}$$

又因为$\mathrm{A}x_2$与x_1, x_2构成线性相关组，u_2不能取 $[0\quad 0]^{\mathrm{T}}$，可取

$$u_2=[-1\quad 1]^{\mathrm{T}},$$

这样可得 $x_3=\mathrm{A}x_2+\mathrm{B}u_2=[2\quad 0\quad 2]^{\mathrm{T}}$。

因此，由$K_1=[u_1 \quad u_2 \quad 0][x_1 \quad x_2 \quad x_3]^{-1}$，可得

$$\mathbf{K}_1=\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[u_1 \quad u_2 \quad 0]} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}}_{[x_1 \quad x_2 \quad x_3]}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b} & (\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1)\mathbf{b} & (\mathbf{A}+\mathbf{B}\mathbf{K}_1)^2\mathbf{b} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

不难验证$(A+BK_1 \ b)$可控。

例题2 系统方程为

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}u$$

欲使闭环系统(A+BK)具有特征值–2, –2, – 1±j, 试确定状态反馈增益阵K。

解 先用试凑法求x_i 和 u_i ：

取L $=[1\ \ 0]^T$, $x_1=b_1=[0\ 0\ 1\ 0]^T$;

取 $u_1=[-1\ \ 0]^T$, 可得 $x_2=[0\ 1\ 0\ 0]^T$;

取 $u_2=[0\ \ 0]^T$, 可得 $x_3=[1\ 0\ 0\ 0]^T$;

取 $u_3=[0\ \ 1]^T$, 可得 $x_4=[0\ 0\ 0\ 1]^T$;

于是由 $\mathbf{K}_1$ 的计算式可得

$$\mathbf{K}_1=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

显然，$(\mathrm{A}+\mathrm{BK}_1,\ \mathrm{b}_1)$可控。令$\mathrm{k}=[k_1\ \ k_2\ \ k_3\ \ k_4]$，直接计算

$$\mathbf{A}+\mathbf{BK}_1+\mathbf{b}_1\mathbf{k}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\k_1&k_2&k_3&k_4\\1&0&0&1\end{bmatrix}$$

它的特征式为

$$s^4-(1+k_3)s^3+(k_3-k_2)s^2+(k_2-k_1)s+k_1-k_4,$$

期望特征式为

$$s^4+6s^3+14\mathrm{s}^2+16s+8,$$

比较上述两多项式的系数，可得

$$k_1=-37,\quad k_2=-21,\quad k_3=-7,\quad k_4=-45$$

状态反馈阵可取为

$$\mathbf{K}=\mathbf{K}_1+\mathrm{Lk}=\begin{bmatrix}-37 & -21 & -8 & -45\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

在上面的做法中，在L和 u_i 取定后，k 就唯一的确定了。但 L 和 u_i 是非唯一的，这一事实说明达到同样极点配置的K值有许多。K的这种非唯一性是多输入系统与单输入系统极点配置问题主要区别之一。如何充分利用K的自由参数,以满足系统其它性能的要求,是多输入系统状态反馈设计的一个研究领域。

作业 **P．139，　4.2, 4.4-4.5**