北京航空航天大學
BEIHANG UNIVERSITY
Add: 37 Xueyuan Rd. Haidian District
Beijing.China.100191
Fax: 86(10)82838058

1-1. $\lambda I-A=\begin{bmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & \lambda+a_1 \end{bmatrix}$ 伴随矩阵为 $(\lambda I-A)^*=\left[\begin{array}{ccc|c} \times & \cdots & \times & 1 \\ \vdots & & \vdots & \lambda \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \times & \cdots & \times & \lambda^{n-1} \end{array}\right]$

(只看最后一列)

$(\lambda I-A)(\lambda I-A)^*=\det(\lambda I-A)I$

$\therefore \det(\lambda I-A)=[a_n, a_{n-1}\cdots \lambda+a_1]\cdot[1,\lambda,\cdots\lambda^{n-1}]^T=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$

$A\cdot\begin{bmatrix}1\\ \lambda_i\\ \vdots\\ \lambda_i^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_i\\ \lambda_i^2\\ \vdots\\ \lambda_i^{n-1}\\ -a_1\lambda_i^{n-1}-\cdots-a_n\end{bmatrix}$ 而 $\det(\lambda_i I-A)=0$，即 $\lambda_i^n=-a_1\lambda_i^{n-1}\cdots-a_{n-1}\lambda_i-a_n$

$\therefore A\cdot\begin{bmatrix}1\\ \lambda_i\\ \vdots\\ \lambda_i^{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_i\\ \vdots\\ \lambda_i^{n}\end{bmatrix}=\lambda_i\cdot\begin{bmatrix}1\\ \lambda_i\\ \vdots\\ \lambda_i^{n-1}\end{bmatrix}$

1-6 对 $\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}$ 进行初等变换（第二行左乘 $-BD^{-1}$ 加至第一行），得

$\begin{bmatrix}A-BD^{-1}C & 0\\ C & D\end{bmatrix}$ 故 $\det\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\det(D)\cdot\det(A-BD^{-1}C)$

若A可逆，第一行左乘 $-CA^{-1}$ 加到第二行，得

$\begin{bmatrix}A & B\\ 0 & D-CA^{-1}B\end{bmatrix}$. $\det\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\det(A)\cdot\det(D-CA^{-1}B)$

构造矩阵 $P=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{c|c} 1 & -b_1\cdots -b_n \\ \hline a_1 & \\ \vdots & I_n \\ a_n & \end{array}\right]$，其中 $A=1$, $B=-[b_1,\cdots b_n]$, $C=[a_1\cdots a_n]^T$, $D=I_n$

A、D均可逆，故 $\det P=\det D\cdot\det(A-BD^{-1}C)=\det A\cdot\det(D-CA^{-1}B)$

其中 $\det D\cdot\det(A-BD^{-1}C)=1+\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$

$\det A\cdot\det(D-CA^{-1}B)=\det\left[I_n+\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}[b_1\cdots b_n]\right]$

1-8 是线性的

满足叠加性: $(P_\alpha u_1)(t)+(P_\alpha u_2)(t)=\begin{cases}u_1(t)+u_2(t) & t\le\alpha\\ 0 & t>\alpha\end{cases} = y_1(t)+y_2(t)$

满足齐次性 $(P_\alpha ku)(t)=\begin{cases}ku(t) & t\le\alpha\\ 0 & t>\alpha\end{cases}=ky(t)$

不是时不变的

$(P_\alpha Q_\beta u)(t)=\begin{cases}u(t-\beta) & t\le\alpha\\ 0 & t>\alpha.\end{cases}$ $\quad (Q_\beta P_\alpha u)(t)=\begin{cases}u(t-\beta) & t-\beta\le\alpha\\ 0 & t-\beta>\alpha\end{cases}$

$(P_\alpha Q_\beta u)(t)\ne(Q_\beta P_\alpha u)(t)$

是因果的

$(P_T P_\alpha u)(t)=\begin{cases}u(t) & t\le\min(T,\alpha)\\ 0 & t>\min(T,\alpha)\end{cases}$ $\quad (P_T P_\alpha P_T u)(t)=\begin{cases}u(t) & t\le\min(T,\alpha)\\ 0 & t>\min(T,\alpha)\end{cases}$

$(P_T P_\alpha u)(t)=(P_T P_\alpha P_T u)(t)$

1-15b

$\begin{cases}\dot{x}_1=-x_1+e^{2t}x_2\\ \dot{x}_2=-x_2\end{cases}$ 解一阶线性微分方程得 $\begin{cases}x_1=\frac{c_1}{2}e^{t}+c_2e^{-t}\\ x_2=c_1e^{-t}\end{cases}$

取$c_1=0$, $c_2=1$, 得$\psi_1=\begin{bmatrix}e^{-t}\\ 0\end{bmatrix}$. 取$c_2=0$, $c_1=2$, 得$\psi_2=\begin{bmatrix}e^{t}\\ 2e^{-t}\end{bmatrix}$

∴一个基本矩阵为$\begin{bmatrix}e^{-t} & e^{t}\\ 0 & 2e^{-t}\end{bmatrix}$

$\Phi(t,t_0)=\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)=\begin{bmatrix}e^{-t} & e^{t}\\ 0 & 2e^{-t}\end{bmatrix}\cdot\frac{e^{2t_0}}{2}\cdot\begin{bmatrix}2e^{-t_0} & -e^{t_0}\\ 0 & e^{-t_0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t+t_0} & -\frac{1}{2}e^{-t+3t_0}+\frac{1}{2}e^{t+t_0}\\ 0 & e^{-t+t_0}\end{bmatrix}$

1-17 $T^{-1}(t)\cdot T(t)=I(t)$

$\frac{d}{dt}[T^{-1}(t)\cdot T(t)]=\frac{d}{dt}[T^{-1}(t)]\cdot T(t)+T^{-1}(t)\cdot\frac{d}{dt}[T(t)]=\frac{d}{dt}I(t)=0$

∴ $\frac{d}{dt}[T^{-1}(t)]\cdot T(t)=-T^{-1}(t)\frac{d}{dt}[T(t)]$

∴ $\frac{d}{dt}=-T^{-1}(t)\frac{d}{dt}[T(t)\cdot T^{-1}(t)$

Add: 37 Xueyuan Rd. Haidian District
Beijing.China.100191
Fax: 86(10)82838058

1-19

$\dot{\Phi}(t,t_0)=A(t)\Phi(t,t_0)$

$\dot{\Phi}_1(t,t_0)=-A^*(t)\Phi_1(t,t_0)$

由1-17, $\dot{T}^{-1}(t)=-T^{-1}(t)\cdot\dot{T}(t)\cdot T^{-1}(t)$, 取 $T(t)=\Phi(t,t_0)$ 则 $T^{-1}(t)=\Phi^{-1}(t,t_0)=\Phi(t_0,t)$

故 $\dot{\Phi}(t_0,t)=-\Phi(t_0,t)\cdot\dot{\Phi}(t,t_0)\Phi(t_0,t)$

$=-\Phi(t_0,t)A(t)$

~~状态转移矩阵~~

取共轭得 $\dot{\Phi}^*(t_0,t)=-A^*(t)\Phi^*(t_0,t)$

状态转移矩唯一, ∵ $\Phi_1(t,t_0)=\Phi^*(t_0,t)=[\Phi^*(t,t_0)]^{-1}$

∴ $\Phi_1(t,t_0)\Phi^*(t,t_0)=\Phi^*(t,t_0)\Phi_1(t,t_0)=\Phi_1^*(t,t_0)\Phi(t,t_0)=I$

1-25 充分性: $CA^kB=\underset{D=\bar{D}}{\bar{C}\bar{A}^k\bar{B}}$ ⇒ 零状态等价.

$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D=C(\frac{1}{s}I+\frac{1}{s^2}A+\frac{1}{s^3}A^2+\cdots)B+D$

$\bar{G}(s)=\bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B}+\bar{D}=\bar{C}(\frac{1}{s}I+\frac{1}{s^2}\bar{A}+\frac{1}{s^3}\bar{A}^2+\cdots)\bar{B}+D$

∵ $CA^kB=\bar{C}\bar{A}^k\bar{B}$, $D=\bar{D}$, $k=0,1,2\cdots$

∴ $G(s)=\bar{G}(s)$, 即零状态等价.

必要性:

$G(t-\tau)=Ce^{A(t-\tau)}B+D\delta(t-\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}C\frac{(t-\tau)^k}{k!}A^kB+D\delta(t-\tau)$

$\bar{G}(t-\tau)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{C}\frac{(t-\tau)^k}{k!}\bar{A}^k\bar{B}+\bar{D}\delta(t-\tau)$

零状态等价, 故 $G(t-\tau)=\bar{G}(t-\tau)$

∴ $CA^kB=\bar{C}\bar{A}^k\bar{B}$, $D=\bar{D}$, $k=0,1,2\cdots$

1-29

一阶子式公分母：$s(s+1)^2$

二阶子式为：$\dfrac{2s+1-2s^2-s}{s^2(s+1)^2}=\dfrac{-2s^2+s+1}{s^2(s+1)^2}$

∴极点多项式为 $s^2(s+1)^2$

当分母取极点多项式时，$G(s)$ 二阶子式为 $-2s^2+s+1$

∴零点多项式为 $s^2-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}$

1-1 推荐一种证明方法，直接对 $\lambda\boldsymbol{I}-A$ 的最后一行展开

1-6 最后证明 $\det\left[\boldsymbol{I}_n+\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & \dots & b_n\end{bmatrix}\right]=1+\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$ 时，用 A 可逆和 D 可逆的结果能直接得证。绝大部分同学都是把矩阵展开用初等变换证明的。

*1-8

不是时不变的

$(P_\alpha Q_\beta u)(t)=\begin{cases}u(t-\beta) & t\le\alpha\\ 0 & t>\alpha.\end{cases}$ $\qquad(Q_\beta P_\alpha u)(t)=\begin{cases}u(t-\beta) & t-\beta\le\alpha\\ 0 & t-\beta>\alpha\end{cases}$

$(P_\alpha Q_\beta u)(t)\ne(Q_\beta P_\alpha u)(t)$

注意 $P_\alpha Q_\beta u(t)$ 和 $Q_\beta P_\alpha u(t)$ 定义关于 t 的差异，很多同学得出系统是时不变的。

*1-29 极点多项式和零点多项式属于必考考点。极点多项式大家基本都能求对，但零点多项式求的是五花八门。注意课本定义：①所有 **r 阶**子式，也就是说不考虑 r-1 阶，r-2 阶…；②分母取极点多项式时，分子的**首一**最大公因式。部分同学没有化成首一形式。