7.1.

$\dot{x} = -2t(t+1)^{-2} \cdot x \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-2t\,dt}{(t+1)^2} \Rightarrow \phi(t,t_0) = (\frac{1+t_0}{1+t})^2 e^{(\frac{2}{1+t_0} - \frac{2}{1+t})}$

当 $t \geq t_0$ 时，有 $|\phi(t,t_0)| \leq e^2$，故 $x=0$ 稳，一致稳。

$\lim\limits_{t\to\infty} |\phi(t,t_0)| = 0$，渐近稳定。

由于 $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{x(t)}{t^{-2}} \Leftrightarrow \lim\limits_{t\to\infty} \frac{\phi(t,t_0)}{t^{-2}} =$ 常数，即 $x(t)$ 趋于 0 的速度与 t^{-2} 同级。

故不是一致渐近稳定。

7.2.

(1) 由 $\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x \Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = -c_1 e^{-t} + c_2 \\ x_2(t) = c_1 \end{cases} \Rightarrow \psi(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \phi(t,t_0) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} + e^{-t_0} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \phi(t_0,\tau)B(\tau) = \begin{bmatrix} e^{-t_0} \\ -1 \end{bmatrix}$，行相关，不可控。

(2) 若 $u=0$，考察 $\|\phi(t,t_0)\|_1 = 1 - e^{-t} + e^{-t_0} \leq 2$，故李氏稳，一致稳。

而 $\lim\limits_{t\to\infty} \|\phi(t,t_0)\| = 1 + e^{-t_0} \neq 0$，故不是渐稳。

7.4.

(1) $\begin{cases} x_1(t) = e^{-t} \cdot x_{10} \\ x_2(t) = \frac{1}{3} e^{t} x_{10} + e^{-2t} \cdot x_{20} \end{cases} \Rightarrow \psi(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^{-t} \\ e^{-2t} & \frac{1}{3} e^{t} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \phi(t,t_0) = \begin{bmatrix} e^{t_0 - t} & 0 \\ \frac{1}{3} e^{t+t_0} - \frac{1}{3} e^{4t_0 - 2t} & e^{2t_0 - 2t} \end{bmatrix}$

故 $\phi(t_0,\tau)B(\tau) = \begin{bmatrix} e^{-t_0} \\ \frac{1}{3} e^{t_0} - \frac{1}{3} e^{3\tau - 2t_0} + e^{-2t_0} \end{bmatrix}$，行无关，可控。

(2) 非齐次方程的稳定性可转化为齐次方程零解稳定性.

可知：$\lim\limits_{t\to\infty}\|\phi(t,t_0)\|_1=\lim\limits_{t\to\infty}\left(e^{t_0-t}+\frac{1}{3}e^{t+t_0}-\frac{1}{3}e^{4t_0-2t}\right)\Rightarrow+\infty$. 不稳定.

7.12

(a). $\det(sI-A)=s^5+4s^4+10s^3+2s^2+s+1$

Routh 判据

$$\begin{matrix} 1 & 10 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ \vdots & & \end{matrix}$$

易知有正特征根. 不稳定. 不渐稳. 不BIBS.

由于 $y\equiv 0$. 故是BIBO(全). 不是T稳定.

(b) 特征值全为零. 且初等因子是一次的, 故稳. 不是渐稳.

$G(s)=\frac{1}{s}$, $(sI-A)^{-1}B=\frac{1}{s}$. 不是BIBS、BIBO, T稳定.
(极点在虚轴上)

(c).
$A=\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$, $A_1=\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -0.1 \end{bmatrix}$, $A_4=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 易见 A_4 有特征值 1.

故不稳、不渐稳. 由于 A_1 可控, A_4 不可控. 故是BIBS, 不是BIBS全.

可观. 故是BIBO, 不是BIBO全. 也不是T稳定.

(d) 0 对应初等因子是一次的. 故稳. 但不渐稳. 不BIBS稳.

$G(s)=\frac{4(2s+5)}{(s+2)^2}$, BIBO稳(全).

不是T稳定.

7-14.

(1) 特征方程 s^3+2s^2+bs+a

Routh.
$$\begin{array}{cc} 1 & b \\ 2 & a \\ \frac{2b-a}{a} & (a\neq 0) \end{array}$$

① 若 $a=0$. $\begin{cases} b=0\text{，两个0根. 且初等因子不是一次. 不稳} \\ b>0\text{，一根为0，两根负，稳.} \end{cases}$

② 若 $a>0$. $\begin{cases} b>\frac{a}{2}\text{，三根负实部} \\ b=\frac{a}{2}\text{，}\lambda_1=-2,\ \lambda_2=\pm j\sqrt{b} \end{cases}$ 都稳.

故李氏稳，$a=0, b>0$ 或 $a>0, b\geq\frac{a}{2}$

(2) 可控. 只需收敛. 即 $a>0, b>\frac{a}{2}$ （若根为0或在虚轴上，对应状态不会收敛）只会不发散.

(3) $G(s)=\dfrac{(s-1)^2}{s^3+2s^2+bs+a}$，即 $a>0, b>\frac{a}{2}$

7-16. 证：BIBO稳 $\Longleftrightarrow$ $G(s)$ 极点有负实部.

要证等价变换不改变BIBO稳 $\Longleftrightarrow$ 等价变换不改变传函 $G(s)$ 显然成立.

$$\begin{cases} \dot{x}=Ax+Bu \\ y=Cx \end{cases} \xRightarrow{\bar{x}=Px} \begin{cases} \bar{A}=PAP^{-1},\ \bar{B}=PB \\ \bar{C}=CP^{-1} \end{cases} \Rightarrow \bar{C}(sI-\bar{A})^{-1}\bar{B} \Longleftrightarrow C(sI-A)^{-1}B.$$

7-21. 证：方程改写为 $(A-aI)^TX+X(A-aI)=-Q.$

易见. $\lambda_{(A-aI)}=\lambda_A-a=\lambda_i-a$. （矩阵 $A-aI$ 的特征值）.

由定理7.25. A 渐稳 $\Leftrightarrow \mathrm{Re}\,\lambda_A<0 \xLeftrightarrow{\text{充要}}$ 对 $\forall N$, $\exists M$.

（这题中. 已知对 $\forall Q$, $\exists X$, 故只要 $\mathrm{Re}\,\lambda_{(A-aI)}<0$）

即 $\lambda_i-a<0 \Rightarrow \lambda_i<a$. 得证.