“最优化方法”大纲

授课教师：刘红英(liuhongying@buaa.edu.cn)，适用日期：2021.9.13 - 2021.12.31

基本信息

- 课程主页：北航课程中心搜索花名册中有自己名字的“最优化方法(刘红英)。”
- 考核方式: 作业和出勤等(10%)+数值练习(20%)+期末考试(70%)=100 分。若期末考试成绩为45分(满分为100)以下，则作业最多6 分，数值练习最多12 分。
- 教材：刘红英，夏勇，周水生，数学规划基础. 北京航空航天大学出版社，2012.10.
- 参考书：推荐但不限于(1) 陈宝林，最优化理论与算法(第二版). 清华大学出版社，2005.10. (2) 黄红选，韩继业，数学规划. 清华大学出版社，2006. (3) Bertsekas D P. 非线性规划(第2版). 宋士吉等译. 清华大学出版社：北京，2013.12.

重要提示

- 每次课后完成与内容匹配的作业，分别在第4周，第7周，第9 周，第11周，第13 周和第15周提交布置的、并且自批自改后的作业(具体提交内容和时间会在课上公布)。
- 不接受任何理由的迟到作业！缺交作业不超过(包括)1次按所有作业都正常提交算。
- 请每节课课前**预习上课内容20-30分钟**，确定自己学习中可能遇到的难点。

教学日历

次(周)	内容(预习章节)	作业
1(2)	课程简介、LP基本概念(§1.1-1.3,§2.1.1-2.1.2)	1.2, 1.3
2(2)	LP 基本定理和既约费用系数(§2.1.3-2.1.4)	2.1(c), 2.2, 2.3, 2.5
(3)	**中秋节放假**	
3(4)	既约费用系数与单纯形法(§2.2.1-§2.2.4)	2.8, 2.9, 2.10(a), 2.20，2.21
4(4)	单纯形法的启动、修正单纯形法(§2.2.5-§2.2.6)	2.11, 2.12, 2.16(c), 2.19
(5)	**国庆节放假**	**发布大作业1：线性规划数值练习**
5(6)	LP 的对偶(§2.3)	2.24, 2.25, 2.27
6(6)	网络流问题及网络单纯形法(§3.1)	2.32, 2.34
7(7)	网络流问题的应用(§3.2)	3.1, 3.4
8(7)	线性整数规划(§3.3.1, §3.4.2)&单纯形法的效率(§2.2.7)	3.7, 3.8, 3.9
9(8)	数学基础、最优性条件、凸函数(§1.4, §4.1-§4.2)	1.4, 1.6, 1.7, 4.2, 4.3, 4.6
10(8)	无约束优化算法综述、线搜索算法(§4.3-§4.4)	4.7, 4.8, 4.11 的第一部分
11(9)	无约束优化：最速下降法、牛顿法(§5.1)	5.3, 5.4, 5.6, 5.11
12(9)	无约束优化：共轭梯度法(§5.2)	5.9, 5.19, 5.21
13(10)	无约束优化：拟牛顿法(§5.3)、最小二乘(§5.4)	5.22, 5.23(a)
14(10)	无约束优化：信赖域法(§6.1-§6.2)	5.27, 6.1, 6.2
(10)		**发布大作业2 ：非线性规划数值练习**
15(11)	无约束优化：Steihaug共轭梯度法(§6.3.3) 约束优化：一阶条件(§7.1-§7.2)、凸规划(§7.5)	7.20, 7.3, 7.4
16(11)	约束优化：一阶条件续(§7.3)	7.6, 7.7(替换课本上的), 8.20(新补充的)
17(12)	约束优化：二阶条件(§7.4)	7.9, 7.10, 7.11
18(12)	约束优化：Lagrange对偶(§7.6-§7.7)	7.13, 7.15
19(13)	约束优化：半定规划(§7.8)	7.17, 7.18, 7.19
20(13)	约束优化：二次规划(§8.1-§8.3)	8.1(替换课本上的), 8.2, 8.3
21(14)	约束优化：惩罚函数法(§9.1)	8.18(新补充的), 9.1
22(14)	约束优化：障碍法(§9.2, §9.5)	9.8
23(15)	约束优化：增广拉格朗日函数与乘子法(§9.3)	9.4，9.7
24(15)	约束优化：逐步二次规划法(§9.4)	9.10, 9.11
	期末考试：研究生院培养处统一安排	

“最优化方法”替换/补充习题

说明：用这里的7.7和8.1替换课本上的对应习题；这里的8.18和8.20是新补充的.

7.7 考虑问题

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^2}{\text{minimize}} \quad & -x_1 \\ \text{subject to} \quad & x_1^2+x_2^2 \le 1, \\ & (x_1-1)^3 - x_2 \le 0. \end{aligned}$$

(a) 说明线性无关约束规范(LICQ)条件在点 $\boldsymbol{x}^*=(1,0)^T$ 处成立.

(b) 说明点 $\boldsymbol{x}^*=(1,0)^T$ 是一个 KKT 点. 该点是全局极小点吗？请给出理由.

(c) 考虑盒子(界)约束优化问题

$$\begin{aligned} \underset{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n}{\text{minimize}} \quad & f(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} \quad & l_i \le x_i \le u_i, i=1,2,\cdots,n, \end{aligned}$$

其中 $l_i, u_i (i=1,2,\cdots,n)$ 是给定的常数，$f(\boldsymbol{x})$ 是连续可微函数. 请问该问题一定有KKT点吗？为什么？如果有KKT点，它一定是问题的最优解吗？请给出理由.

8.1 考虑等式二次规划问题

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & q(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}^T \boldsymbol{x} \\ \text{subject to} \quad & x_1+2x_2+x_3=4. \end{aligned}$$

消去变量x_1 后，得到目标函数

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{U}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{y},$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 是一个对称的矩阵, $\boldsymbol{v}$ 是一个固定的向量. 由此给出二次规划问题的解 $\boldsymbol{x}^*$ ，并给出等式约束的拉格朗日乘子 λ^* . 请问 $\boldsymbol{x}^*$ 是否是

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & q(\boldsymbol{x}) \\ \text{subject to} \quad & x_1+2x_2+x_3 \ge 4, \\ & \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

的解.

8.18 以 $\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{0}$ 为初始点，用积极集法求解二次规划问题

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 \\ \text{subject to} \quad & x_1+x_2 \le 2 \\ & x_1 \ge 0 \\ & x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

为简单起见，求解每一等式约束子问题时，不用对变量进行平移(从而利用图解法易于求解).

8.20 说明在约束条件

$$\begin{aligned} x_1 \quad + \quad 2x_2 - \quad x_3 \ge 4 \\ -x_1 \quad + \quad x_2 - \quad x_3 \le 2 \end{aligned}$$

下求到原点(在 $\mathbb{R}^3$ 中)的欧几里得距离最短的点的问题可表述成一个二次规划问题. 通过消去变量 x_1 与 x_2 计算两个约束都是积极的等式问题的解. 这个解是否为最短距离二次规划问题的解.